Wer hat das Malnehmen erfunden?

Karel Tschacher
Mathematisches Institut der Universität Erlangen-Nürnberg
Didaktik der Mathematik

Vortrag zur Preisverleihung des Fümo-Wettbewerbs 2003 am 22. Juli 2003 im Helene-Lange-Gymnasium in Fürth/Bayern

Wer hat das Malnehmen erfunden?
Oft fragen Schüler der ersten Klasse, wer denn die Zahlen erfunden habe. Und hin und wieder wird man gefragt, wer den die Rechenarten erfunden habe. Zum Malnehmen möchte ich heute ein paar Erklärungen geben:

Als eine alte Quelle kann man
Euklid, Elemente Buch 7 Definition 15 zitieren, hier wird die Multiplikation zum ersten Mal schriftlich erklärt:
"Man sagt, dass eine Zahl eine Zahl vervielfältige, wenn die zu vervielfältigende so oft zusammengesetzt wird, wie viel Einheiten jene enthält, und so eine Zahl entsteht!"

Also 24 soll verfünffacht werden (5*24), wenn 24 so oft zusammengefügt (addiert) wird, wie viel Einheiten (fünf) 24 + 24 + 24 + 24 + 24 und so eine Zahl (120) entsteht.

Gut so

Welche alten Kulturen konnten Multiplizieren? Hier nur einige Beispiele:
Die Ägypter (16. Jahrhundert vor Chr. , Teile aus dem 19. Jahrhundert vor Chr. im Papyrus Rind) , die Babylonier (mathematische Keilschrifttexte um 3000 vor Chr.) , die Griechen (Eutokios in Archimedes 287 bis 212), die Römer, die Inder (Aryabhata I, geboren um 476 geschrieben um 499), die Araber (al-Karagi Ende des 10. Jahrhunderts) die Italiener (Leonardo von Pisa1170 bis 1240), die Deutschen (Apian 1495 bis 1552) und, und, und.

Wie kann man sich das Malnehmen von zwei natürlichen Zahlen vorstellen?

Das Produkt zweier natürlicher Zahlen kann man sich als Lösung folgender Aufgaben vorstellen:

1. " Jens geht dreimal in den Keller und holt jweils 4 Flaschen Limonade herauf"
Der gleiche Vorgang wiederholt sich mehrmals. Da es sich um eine Handlungskette handelt, kann man diesen Ablauf auch nicht graphisch darstellen:
ein Vorgang, der zeitlich nacheinander abläuft..

2. "Auf dem Tisch stehen 3 Teller mit je vier Broten"
Das räumliche Nebeneinander von bestimmten Mengen gleicher Anzahl wird beschrieben.:
ein Bild, das räumlich zeitgleich zu sehen ist.

3. " 3 Jungen und 4 Mädchen bilden Tanzpaare auf einer Party"
Paare zwischen Elementen von zwei Mengen werden bestimmt. Man kann nicht alle Paare gleichzeitig darstellen.:

ein Vorgang, bei dem man sich alle denkbaren Paare vorstellen muss..

Ich stelle euch einige Verfahren vor, die man gut verstehen kann. Trotzdem wird man überrascht sein, wie man auf verschiedene Weise Multiplizieren kann.

Zunächst will ich noch einmal erklären, wie wir in Bayern schriftlich malnehmen, multiplizieren:

Wenn man zwei Zahlen miteinander malnehmen will, muss man seine Einmaleinsreihen gut kennen, und das ist mühsam.

Ich gebe die Aufgabe 92 mal 43 vor,

9	2	·	4	3
		2	7	6
	3	6	8	
	3	9	5	6

dann schreiben wir die 92 an den Anfang, machen den Punkt und schreiben die 43;
dann ziehen wir einen waagerechten Strich unter das Geschriebene und beginnen zu rechnen:
Man beginnt mit dem kleinsten Wert des zweiten Faktors - also hinten und rechnet 3 mal 92 in der Form 3 mal ist 6, diese 6 schreibt man unter die 3; da kein Übertrag da ist, wird dann 3 mal 9 ist 27 gerechnet, die 7 unter die 4 und davor die 2 geschrieben, es steht also da 276 und das entspricht dem Produkt 3 mal 92;
dann geht man zum nächst größeren Wert, hier also 40 betrachtet aber nur die Zahl 4.
Man rechnet 4 mal 2 ist 8 und schreibt diese 8 unter die 7 des letzten Ergebnisses; da es keinen Übertrag gibt, wird nun 4 mal 9 ist 36 gerechnet und das Ergebnis davor geschrieben, so dass in der unteren Zeile 368 steht und das entspricht dem Produkt 4 mal 92.
Nun wird ein weiterer waagerechter Strich gezogen und die übereinander stehenden Zahlen werden addiert.
6 bleibt allein und stellt die letzte Stelle des Ergebnisses dar,
7 und 8 ist 15, die 5 wird hingeschrieben und eins wird gemerkt,
2 und 6 und eins sind 9, 9 wird an die dritte Stelle des Ergebnisses notiert und
schließlich wird die 3 notiert als erste Ziffer des Ergebnisses: 3956.

Was musste ich können, das Einmaleins der drei und der vier und ich musste addieren können.

Manche Völker machen sich das Malnehmen leichter, hier die erste Methode,
sie heißt so, wie man es macht:

Die Methode der Verdopplung

Um 92 mit 43 zu multiplizieren , werden die folgenden Zahlenreihen aufgestellt, beginnend mit 1 mal 92, dann 2 mal 92 und 4 mal 92, jeweils das Doppelte der vorhergehenden Zahl:

01	92
02	184
04	368
08	736
16	1472
32	2944

Das Verdoppeln ist einfach, es ist ja nur das Einmaleins der Zahl 2.

Die Reihe hört bei 32 auf, weil der zweite Faktor 43 zwar größer ist als 32, aber kleiner ausfällt als die nächste Verdopplung, hier 64.
Und nun beginnt man die Zahlen der ersten Reihe so zu addieren, damit 43 herauskommt:
32 (Rest 11) + 8 (Rest 3) + 2 (Rest 1) +1, man setzt einen Punkt vor jede gewählte Zahl

•	1	92
•	2	184
	4	368
•	8	736
	16	1472
•	32	2944

43 mal 92

und dann schreibt man alle die verdoppelten Zahlen untereinander, die man ausgewählt hat:

$$\begin{array}{r} 92 \\ 184 \\ 736 \\ \underline{2944} \\ 3956 \end{array}$$

Warum funktioniert diese Methode?
Bei unserem Beispiel:

$$43 \cdot 92 = (32 + 8 + 2 + 1) \cdot 92 = 32 \cdot 92 + 8 \cdot 92 + 2 \cdot 92 + 1 \cdot 92 = 2944 + 736 + 184 + 92 = 3956$$

Und das kann man mit jedem Faktor, ob es 43 oder irgend ein anderer ist, machen. Diese Methode ist leichter, weil man nur das Zweiereinmaleins können muss und dann das Addieren von Zahlenreihen beherrschen muss.

Die Russische Bauern Methode

Wir wollen wieder 43 mal 92 rechnen. Man beginnt wieder damit, Zahlenreihen zu erzeugen. Aber jetzt wird der zweite Faktor immer halbiert, wenn der ungerade ist, wird zunächst eins abgezogen, damit man ohne Rest halbieren kann:

43	92
21	184
10	368
05	736
02	1472
01	2944

Nun wählt man alle die Zahlen der linken Spalte aus, die ungerade sind:

•	43	92
•	21	184
	10	368
•	05	736
	02	1472
•	01	2944

Man schreibt die zugehörigen Zahlen der rechten Spalte untereinander und addiert sie:

92
184
736
2944
3956

Warum funktioniert diese Methode?
Bei unserem Beispiel:

•	43	•	92	=	(21 • 2 + 1)	•	92	=	21 • 184	+	92	=	3956
•	21	•	184	=	(10 • 2 + 1)	•	184	=	10 • 368	+	184	=	3864
	10	•	368	=	(5 • 2 + 0)	•	368	=	5 • 736	+	000	=	3680
•	05	•	736	=	(2 • 2 + 1)	•	736	=	2 • 1472	+	736	=	3680
	02	•	1472	=	(1 • 2 + 0)	•	2944	=	1 • 2944	+	000	=	2944
•	01	•	2944	=	(0 • 2 + 1)	•	2944	=	0 • 2944	+	2944	=	2944

Wenn man nun alle Zahlen der vorletzten Spalte addiert, erhält man das Ergebnis.

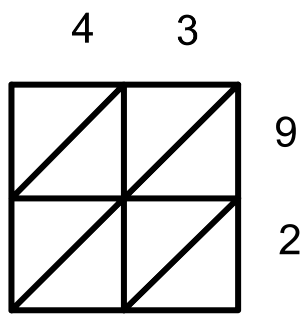
Man kann es aber auch so erklären:
Die Reste kommen durch die ungeraden Summenden zustande; im ersten Fall 92;
Dann bei der nächsten Zahl, sie ist wieder ungerade der Rest 184; dann bei 10 kein Rest, aber bei 5 ein Rest von 736 und am Schluss bei einmal wird 2944 anfallen und diese Reste werden dann addiert. Mit einer Zerlegung in Zweierpotenzen kann das erklärt werden.
Die Zahl 43 wird in Potenzen zur Basis 2 zerlegt und so geschrieben.

$$43 \cdot 92 = (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 92 =$$

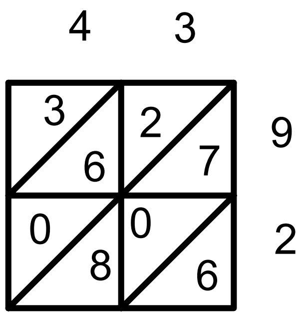
$$= 92 + 2 \cdot 92 + 8 \cdot 92 + 32 \cdot 92$$

Jede ungerade Zahl hinterlässt einen Rest von 1, um eine gerade Zahl zu werden. Und damit werden die Reste addiert: der erste Rest 92 und dann der zweite Rest 184 usw.

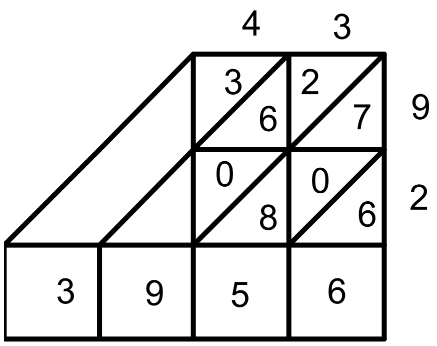
Die Nepersche Gittermethode
Wir wollen wieder betrachten, wie man 43 mit 92 malnimmt.
Man zeichnet sich vier Quadrate auf und schreibt die Faktoren an den oberen und rechten Rand:



Nun werden die zwei Zahlen die ein Feld begrenzen multipliziert,
3 mal 9 oben rechts ist 27 und die 7 in das rechte Dreieck, die 2 in das linke Dreieck
3 mal 2 unten rechts ist 6 und die 6 in das rechte Dreieck, die 0 in das linke Dreieck
4 mal 2 unten links ist 8 und die 8 in das rechte Dreieck, die 0 in das linke Dreieck
4 mal 9 oben links ist 36 und die 6 in das rechte Dreieck, die 3 in das linke Dreieck.



Und nun der letzte Schritt: alle Zahlen in den Diagonalen werden addiert und voreinander notiert:
6 ist die letzte Ziffer des Ergebnisses
7 + 0 + 8 = 15 5 ist die zweitletzte Ziffer des Ergebnisse und eine eins als Übertrag
1 + 2 + 6 + 0 = 9 ist die dritte Ziffer des Ergebnisses
3 ist die erste Ziffer des Ergebnisses
Ergebnis: 3956

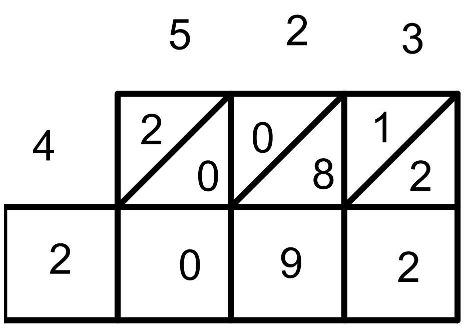


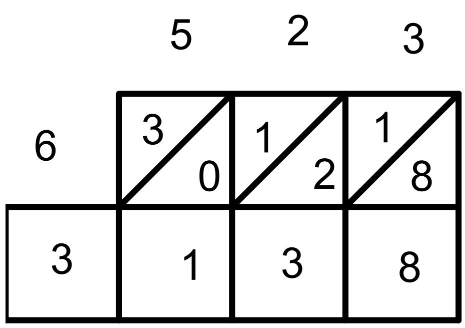
Warum klappt hier die Multiplikation?
Der Grund liegt darin, dass diese Schreibweise das Stellenwertsystem benutzt, die Diagonalen sind hier schräge Linien, wir schreiben stellenwertrichtig untereinander. Der Übertrag wird genau benutzt wie das Rechnen von hinten nach vorn. Das ist also ein echter Vorgänger der heute benutzen Methode des schriftlichen Multiplizierens. Nun kann man dieses System

erweitern, und das hat Neper (1550 - 1617) gemacht. Er hat Streifen hergestellt, die Einmaleinsreihe für jede Zahl von 1 bis 9 und nun benutzt man zum Malnehmen diese Streifen:
Wir denken an die folgende Aufgabe

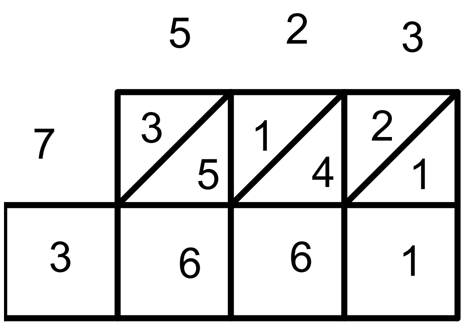
523 mal 467

Neper würde jetzt seinen Schülern sagen:
Nimm die Streifen 5 und 2 und 3 her und lege sie nebeneinander:
Davor liegt der Streifen mit dem Index, das sind die Zahlen von 1 bis 9.
Der zweite Faktor ist 467, daher liest man am Index 4 und dann bei 6 und bei 7 nach:
Hier muss man drei Quadrate zusammenzählen:
Im ersten Fall





wird 4 mal 523 gerechnet 2099 im zweiten Fall wird 6 mal 523 gerechnet 3138



im dritten Fall wird 7 mal 523 gerechnet 3661
Und nun muss noch stellenwertrichtig addiert werden:
467 = 400 + 60 +7
$467 \cdot 523 = 400 \cdot 523 + 60 \cdot 523 + 7 \cdot 523$

4	6	7	·	5	2	3	=
2	0	9	2	0	0		
	3	1	3	8	0		
		3	6	6	1		
2	4	4	2	4	1		

Das Trachtenberg-System

Das ist eine Methode, schnell und im Kopf zu rechnen.
Hier sei nur die Multiplikation vorgestellt, aber damit kann man auch schnell Teilen und Wurzelziehen.

Bleiben wir bei der Aufgabe 43 mal 92
Man schreibt die Aufgabe mit den Zahlen untereinander

	4	3
·	9	2

1. Schritt
Im Kopf wird Einer mal Einer gerechnet: 3 mal 2 ist 6; 6 ist die letzte Ziffer des Ergebnisses.

	4	3
·	9	2
		6

2. Schritt
Im Kopf werden der Zehner der ersten Zahl und der Einer der zweiten Zahl multipliziert und das Produkt aus Zehner der zweiten Zahl und Einer der ersten Zahl addiert: 4 mal 2 + 3 mal 9 = 8 + 27 = 35, 5 ist die Ziffer an der vorletzten Stelle

	4	3
·	9	2
	5	6

3. Schritt I
Im Kopf werden die beiden Zehner multipliziert und der Übertrag 3 dazugezählt: 4 mal 9 + 5
36 + 5 = 39 diese beiden Ziffer werden vor das bisher gefundene Ergebnis geschrieben.

		4	3
	·	9	2
3	9	5	6

Wieso wird das gehen?
Stellen wir uns Zahlen geschrieben mit Ziffern vor
ab für 43 und xy für 92 mit a = 4 und B = 3 und x = 9 und y = 2:

Dann ist $43 = 10 \cdot a + b$ und $92 = 10 \cdot x + y$

$$(10 \cdot a + b) \div (10 \cdot x + y) = \underbrace{100 \cdot a \cdot x}_{\text{Schritt 3}} + \underbrace{10 \cdot (a \cdot x + b \cdot y)}_{\text{Schritt 2}} + \underbrace{b \cdot y}_{\text{Schritt1}}$$

Die Fingermultiplikation

Zunächst eine einfache Vorübung, es geht um das kleine Einmaleins der neun:
Man nehme seine zehn Finger und zeige sie hoch; Nun eine erste Rechenaufgabe:
4 mal 9
damit man die Aufgabe nicht vergisst, klappt man den vierten Finger der linken Hand ein: man möchte also vier mal neun wissen!
Links davon zählt man drei Finger, das sind die Zehner also schon mal 30 und rechts davon zählt man sechs Finger, das sind die Einer also 6, diese werden dazu gezählt und schon fertig:
4 mal 9 ist 36:
Und noch eine Aufgabe: 8 mal 9
Man klappt den dritten Finger der rechten Hand ein, als Merker für 8 mal 9:
und zählt links 7 Finger und rechts 2 Finger Ergebnis 72.
Alles klar?
Und nun zu den schwierigeren Aufgaben. Jeder von euch kann sicher das kleine Einmaleins bis zur 5?
Deshalb brauchen wir nur eine Hilfe für die Aufgaben ab der sechs:

Ein erster Versuch: Ich stelle die Aufgabe 7 mal 8:
Bei beiden Händen bedeutet der Handballen immer die Zahl 5, die linke Hand benutze ich, um mir den ersten Faktor zu merken: der kleine Finger und der Ringfinger der linken Hand werden in den Handballen geklappt und stellen sieben dar.
Und der kleine Finger, der Ringfinger und der Mittelfinger der rechten Hand stellen zusammen mit dem Handballen die Zahl 8 dar.
Damit ich mir die Aufgabe gut merken kann, berühren sich beide Finger und ich kann die Aufgabe gut ablesen:

7 mal 8

Ich halte die Hände so, dass gegenüberliegende Finger sich entsprechen, das heißt die kleinen Finger beider Hände sind nach unten gerichtet und die beiden Daumen zeigen nach oben, etwa so!
Es gibt nun Finger an jeder Hand, die umgeklappt sind und solche, die sind gerade geblieben.
.
Die umgeklappten Finger werden zusammengezählt und stellen die Zehner des Ergebnisses dar, in unserem Beispiel sind es fünf Finger also 50;
die geraden Finger in der linken Hand und die geraden Finger in der rechten Hand werden miteinander malgenommen. Bei uns linke Hand drei und rechte Hand zwei also 3 mal 2 ist 6, das sind die Einer: Endergebnis 56.
Merkregel: Die Zehner sind die Summe aller Finger umgeklappten Finger
Die Einer sind das Produkt der geraden Finger der beiden Hände.

Noch eine Aufgabe:
acht mal sechs 8 mal 6
linke Hand kleinen Finger, Ringfinger und Mittelfinger umklappen, rechte Hand kleinen Finger umklappen. Umgeklappt sind 4, 4 mal 10 also 40;
Gerade sind 2 und 4, Produkt aus 2 und 4 ist 8;
Ergebnis 48.

Warum klappt das?
Die Begründung für jede Aufgabe kann mit dem folgenden Beispiel erfolgen.
Nehmen wir die letzte Aufgabe:

$$8 \cdot 6 = [10-2] \cdot [10-4] = \left[10 - \underbrace{(5-3)}_{2}\right] \cdot \left[10 - \underbrace{(5-1)}_{4}\right] ==$$

Die Faktoren müssen als Ergänzung zu 10 geschrieben werden

8 = 10 – 2 und 6 = 10 – 4 und man braucht die Darstellung 8 = 5 + 3 und 6 = 5 +1
die 3 sind die abgeklappten Finger der linken Hand,
die 1 ist der abgeklappte Finger an der rechten Hand.

$$= \left[10 + \underbrace{3-5}_{-2}\right] \cdot \left[10 + \underbrace{1-5}_{-4}\right] =$$

Wie kann man nun die Summe 3 und 1 erhalten und das Produkt aus 2 und 4?

$$= 10 \cdot 10 + 10 \cdot 1 - 10 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 5 - 10 \cdot 5 - 5 \cdot 1 + 5 \cdot 5 ==$$

$$= 10 \cdot 10 + 10 \cdot (1+3) - 10 \cdot (5+5) + 3 \cdot (1-5) - 5 \cdot (1-5) =$$

$$= 10 \cdot (10-10) + 10 \cdot (1+3) + (3-5) \cdot (1-5) =$$

$$= 10 \cdot (1+3) + 2 \cdot 4 = 40 + 8 = 48$$

Das kann man mit jeder Fingeraufgabe so machen. Und damit ist diese Methode allgemein richtig.

Nun, was habt Ihr heute gelernt? Wie Menschen in anderen Kulturen schriftlich multiplizieren und wie man mit den Fingern die Aufgaben des Einmaleins nach 5 mal 5 rechnen kann. Vielleicht erklärt ihr heute Nachmittag der Mama oder dem Papa dieses überraschende Verfahren.