

# DARSTELLUNGSTHEORIE VON LIE-ALGEBREN

PETER FIEBIG

Z . Dies ist das Skript zur Vorlesung „Darstellungstheorie von Lie-Algebren“ im Sommersemester 2008 in der Fassung vom 16. Juli 2008. Es wird nach und nach aktualisiert.

## I

1. Zur Motivation: Darstellungstheorie von Gruppen	2
1.1. Darstellungen von Gruppen	3
1.2. Einfache Darstellungen	4
1.3. Gruppen „mit Struktur“	5
1.4. Darstellungen von Lie-Gruppen	5
1.5. Darstellungen der Lie-Algebra	6
2. Lie-Algebren	7
2.1. Definition von Lie-Algebren	7
2.2. Darstellungen von Lie-Algebren	9
2.3. Einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, k)$ endlicher Dimension	10
3. Nilpotente und auflösbare Lie-Algebren	12
3.1. Nilpotente Lie-Algebren und der Satz von Engel	13
3.2. Auflösbare Lie-Algebren und der Satz von Lie	15
4. Kriterien für Auflösbarkeit	16
4.1. Die Killing-Form	16
4.2. Erinnerung: halbeinfache und nilpotente Endomorphismen	17
5. Halbeinfache komplexe Lie-Algebren	19
6. Halbeinfache Darstellungen und der Satz von Weyl	20
6.1. Das Lemma von Schur	20
6.2. Halbeinfache Darstellungen	21
6.3. Der Satz von Weyl	21
6.4. Der Casimir-Operator	21
6.5. Homomorphismen zwischen Darstellungen	22
7. Die abstrakte Jordanzerlegung	24
8. Die Wurzelraumzerlegung	26
9. Wurzelsysteme	30
9.1. Spiegelungen	30
9.2. Wurzelsysteme	30
9.3. Paare von Wurzeln	32

9.4.	Basen, positive Wurzeln und Weylkammern	32
9.5.	Die Weylgruppe	34
9.6.	Die Cartan-Matrix	36
9.7.	Das Dynkin-Diagramm	37
9.8.	Irreduzible Wurzelsysteme	37
9.9.	Klassifikation von Wurzelsystemen	37
10.	Zur Klassifikation von halbeinfachen komplexen Lie-Algebren	38
10.1.	Die universelle Einhüllende	40
10.2.	Darstellungen von $\mathfrak{g}$ und von $U(\mathfrak{g})$	41
10.3.	Tensoralgebren	41
10.4.	Das PBW-Theorem	42
10.5.	Erzeuger und Relationen	44
10.6.	Der Satz von Serre	45
11.	Darstellungstheorie von halbeinfachen Lie-Algebren	45
11.1.	Höchstgewichtsmoduln	46
11.2.	Borelsche Unteralgebren	46
11.3.	Einfache Höchstgewichtsmoduln	48
11.4.	Charaktere einfacher Moduln	50

## 1. $\mathbb{Z}$   $M$   : $D$   $G$

Wir beginnen sehr elementar.

**Definition 1.1.** Eine *Gruppe* ist eine Menge  $G$  zusammen mit einer Verknüpfung  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ , der *Multiplikation*, und einer Abbildung  $G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x^{-1}$ , der *Inversion*, so daß folgende Axiome gelten:

- (1) Es existiert ein Element  $e \in G$ , das *neutrale* Element, mit der Eigenschaft  $e \cdot x = x \cdot e = x$  für alle  $x \in G$ .
- (2) Es gilt  $x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = e$  für alle  $x \in G$ .
- (3) Es gilt  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  für alle  $x, y, z \in G$ .

Das neutrale Element  $e$  ist durch seine definierende Eigenschaft (1) eindeutig bestimmt. Denn ist  $e' \in G$  ein weiteres Element mit der Eigenschaft (1), so gilt  $e = e \cdot e' = e'$ . Deshalb ist auch Axiom (2) nicht in sich widersprüchlich.

*Beispiele 1.2.* (1) Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der Addition  $(x, y) \mapsto x + y$  und Inversion  $x \mapsto -x$ .

(2) Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  mit der Addition  $(x, y) \mapsto x + y$  und Inversion  $x \mapsto -x$ .

(3) Die nicht verschwindenden rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  mit der Multiplikation  $(x, y) \mapsto xy$  und Inversion  $x \mapsto x^{-1}$ .

(4) Die positiven rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}_{>0}$  mit der Multiplikation  $(x, y) \mapsto xy$  und Inversion  $x \mapsto x^{-1}$ .

- (5) Ist  $X$  eine Menge, so ist die Menge  $S_X = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$  eine Gruppe mit der Verkettung als Multiplikation,  $(f, g) \mapsto f \circ g$ , und der Inversion  $f \mapsto f^{-1}$ . Insbesondere ist  $S_n := S_{\{1, \dots, n\}}$  die *symmetrische Gruppe über  $n$  Elementen*.
- (6) Sei  $k$  ein Körper,  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. So ist die Menge  $GL(V)$  der invertierbaren  $k$ -linearen Endomorphismen von  $V$  nach  $V$  eine Gruppe mit Verkettung als Multiplikation,  $(A, B) \mapsto A \circ B$ , und Inversion  $A \mapsto A^{-1}$ .

**Definition 1.3.** Eine Gruppe  $G$  heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn für alle  $x, y \in G$  gilt:  $x \cdot y = y \cdot x$ .

Seien  $G$  und  $H$  Gruppen.

**Definition 1.4.** (1) Eine Abbildung  $f: G \rightarrow H$  heißt *Homomorphismus von Gruppen*, falls für alle  $x, y \in G$  gilt:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

- (2) Ein bijektiver Homomorphismus von Gruppen heißt *Isomorphismus*. Die Gruppen  $G$  und  $H$  heißen *isomorph*, falls ein Isomorphismus  $f: G \rightarrow H$  existiert.

Ist  $f: G \rightarrow H$  ein bijektiver Homomorphismus von Gruppen, so ist auch  $f^{-1}: H \rightarrow G$  ein Homomorphismus von Gruppen. Das läßt sich leicht nachrechnen (Übung!)

Sei  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Gruppen und  $e_G$  das neutrale Element von  $G$ . Wegen  $f(x) = f(x \cdot e_G) = f(x) \cdot f(e_G)$  und  $f(x) = f(e_G \cdot x) = f(e_G) \cdot f(x)$  ist  $f(e_G) = e_H$ , das neutrale Element in  $H$ . Wegen  $e_H = f(e_G) = f(x^{-1} \cdot x) = f(x^{-1}) \cdot f(x)$  und  $e_H = f(e_G) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) \cdot f(x^{-1})$  ist  $f(x^{-1})$  das inverse Element zu  $f(x)$ .

**1.1. Darstellungen von Gruppen.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $k$  ein Körper.

**Definition 1.5.** Eine *Darstellung von  $G$  über  $k$*  ist ein  $k$ -Vektorraum  $V$  mitsamt eines Homomorphismus

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

von Gruppen.

Zur besseren Lesbarkeit der Formeln vereinbaren wir für das Folgende die Abkürzung  $g.v := \rho(g)(v)$ .

*Beispiele 1.6.* (1) Für jede Gruppe  $G$  und jeden  $k$ -Vektorraum ist die *konstante Abbildung*  $G \rightarrow GL(V)$ ,  $g \mapsto \text{id}$ , eine Darstellung. Man nennt dies die *triviale Darstellung*.

- (2) Ist  $G \subset GL(V)$  eine Untergruppe, so ist die Inklusion  $G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung. Man nennt sie die *Standarddarstellung*.

- (3) Jedes  $A \in GL(V)$  definiert eine Darstellung von  $\mathbb{Z}$  mittels der Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow GL(V)$ ,  $n \mapsto A^n$ .

Die Motivation hinter dem Begriff einer Darstellung ist die folgende: Ist  $V$  endlich dimensional mit Dimension  $n$  und wählen wir eine Basis von  $V$ , so können wir  $GL(V)$  identifizieren mit der Teilmenge  $\text{Mat}(n \times n, k)^\times \subset \text{Mat}(n \times n, k)$  der *invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in  $k$* . Die Abbildung  $\rho$  stellt die Elemente aus  $G$  also dar durch Matrizen, so daß das Multiplizieren von Elementen auf  $G$  der Matrizenmultiplikation entspricht. Ist  $\rho$  injektiv, so haben wir unsere Gruppe also

dargestellt durch eine Untergruppe der invertierbaren Matrizen. Das ist insbesondere hilfreich beim Rechnen.

Die Darstellungstheorie war, historisch gesehen, zunächst eine Theorie zur Untersuchung der Struktur einer Gruppe. Heute hat sich der Fokus für viele Mathematiker geändert. Wir nehmen oft an, die Struktur der Gruppe selbst sei gut verstanden und wir fragen dann nach der Struktur der *Kategorie aller Darstellungen* der Gruppe. Typische Fragestellungen sind: „Wieviele“ Darstellungen gibt es? Gibt es „Beziehungen“ zwischen zwei Darstellungen? Wie lässt sich die „Menge aller Darstellungen“ charakterisieren? Selbst für relativ einfache Gruppen wie die symmetrischen Gruppen  $S_n$  sind obige Fragestellungen noch längst nicht gelöst.

Seien  $(V, \rho)$  und  $(V', \rho')$  Darstellungen von  $G$  über  $k$ .

**Definition 1.7.** Eine  $k$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V'$  heißt *Homomorphismus von Darstellungen*, falls gilt

$$f(g.v) = g.f(v)$$

für alle  $g \in G, v \in V$ .

Sei  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung über  $k$ .

**Definition 1.8.** Eine *Unterdarstellung* von  $(\rho, V)$  ist ein  $k$ -Untervektorraum  $U \subset V$ , so daß für alle  $g \in G$  die Abbildung  $\rho(g): V \rightarrow V$  den Unterraum  $U$  in sich überführt.

Jede Darstellung  $V$  besitzt zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Unterdarstellungen: Den trivialen Untervektorraum  $\{0\} \subset V$  und den vollen Untervektorraum  $V \subset V$ .

*Übungen 1.9.* (1) Ist  $U \subset V$  ein Unterraum wie in der Definition, so ist für jedes  $g \in G$  die Einschränkung  $\rho(g)|_U: U \rightarrow U$  eine invertierbare Abbildung. Das Einschränken liefert uns also eine Abbildung  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(U)$ , die ebenfalls eine Darstellung ist.

(2) Ist  $U \subset V$  eine Unterdarstellung, so gibt es genau eine Struktur einer Darstellung auf dem Quotientenvektorraum  $V/U$ , so daß die kanonische Abbildung  $V \rightarrow V/U$  ein Homomorphismus von Darstellungen wird.

**1.2. Einfache Darstellungen.** Sei  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung über  $k$ .

**Definition 1.10.** Die Darstellung  $(V, \rho)$  heißt *einfach*, falls  $V \neq \{0\}$  und falls die einzigen Unterdarstellungen  $\{0\} \subset V$  und  $V \subset V$  sind.

Die ersten Fragen, die sich für Darstellungstheoretiker stellen, sind folgende:

*Wieviele einfache Darstellungen von  $G$  über  $k$  gibt es?* (Wir betrachten für diese Frage alle Darstellungen natürlich *bis auf Isomorphie*, d.h. wir zählen isomorphe Darstellungen nur einmal.)

*Wie lassen sich diese Darstellungen charakterisieren?* (Es ist nicht leicht zu spezifizieren, was „charakterisieren“ bedeuten soll.)

Oftmals ist eine Antwort auf die erste Frage weitgehend unabhängig vom Körper  $k$  (zumindest, wenn man nur algebraisch abgeschlossene Körper in Betracht zieht). Die zweite Frage hängt jedoch fast immer stark von der Arithmetik von  $k$  ab.

Ein Beispiel für ein typisches Ergebnis in der Darstellungstheorie ist das folgende. Sei dafür  $G$  eine endliche Gruppe und  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

**Satz 1.11.** *Ist die Charakteristik von  $k$  kein Teiler der Gruppenordnung (also der Anzahl der Elemente in  $G$ ), so gibt es bis auf Isomorphie genauso viele einfache Darstellungen von  $G$  wie Konjugationsklassen in  $G$ .*

Insbesondere: Ist  $G$  also eine endliche, abelsche Gruppe und  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik kein Teiler ist von  $|G|$ , so gibt es also bis auf Isomorphie genauso viele einfache Darstellungen von  $G$  wie Elemente in der Gruppe.

Kardinalfrage: Läßt sich auf natürliche Weise jedem Element aus  $G$  eine einfache Darstellung zuordnen?

Im Allgemeinen: NEIN! Das Problem ist verwandt zu folgendem Phänomen: Ist  $V$  ein endlich dimensionaler  $k$ -Vektorraum und  $V^*$  sein Dualraum, also der Raum der linearen Abbildungen von  $V$  nach  $k$ , so ist  $\dim V = \dim V^*$ . Also sind  $V$  und  $V^*$  isomorph. Es gibt aber im Allgemeinen *keinen* bevorzugten, „natürlichen“ Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$ . (Anmerkung: Dualisieren wir zweimal, so gibt es tatsächlich einen bevorzugten Isomorphismus  $V \rightarrow V^{**}$ !)

**1.3. Gruppen „mit Struktur“.** Wir haben bisher nur den „diskreten“ Fall von Darstellungen von Gruppen betrachtet. Oft trägt die Menge, die einer Gruppe zugrundeliegt, aber eine zusätzliche Struktur (als topologischer Raum, als Mannigfaltigkeit oder als algebraische Varietät), die von den Strukturabbildungen Multiplikation und Inversion respektiert wird (so daß diese Abbildungen also stetig, differenzierbar oder algebraisch (regulär) sind). Man spricht dann von *topologischen*, von *Lie-Gruppen* bzw. von *algebraischen Gruppen*.

Ist nun  $V$  ein topologischer Vektorraum, so wird  $GL(V)$  eine topologische Gruppe, ist  $V$  ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum, so ist  $GL(V)$  eine Lie-Gruppe, und ist  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $V$  ein endlich dimensionaler  $k$ -Vektorraum, so ist  $GL(V)$  eine algebraische Gruppe. Wir können also von unseren Darstellungen  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  verlangen, daß sie stetig, differenzierbar bzw. regulär sind und erhalten spezielle Kategorien von Darstellungen.

**1.4. Darstellungen von Lie-Gruppen.** Wir wollen uns nun auf den Fall von Lie-Gruppen beschränken. In diesem Fall ist  $G$  also eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und die Abbildungen  $m: G \times G \rightarrow G$  und  $i: G \rightarrow G$  sind differenzierbar. Wir betrachten endlich dimensionale Darstellungen über  $\mathbb{R}$ , dem Körper der reellen Zahlen. Dann ist auch  $GL(V)$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und wir verlangen von einer Darstellung  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ , daß sie differenzierbar ist.

Wir betrachten nun den Tangentialraum  $T_e G$  von  $G$  am neutralen Element. Er trägt eine besondere algebraische Struktur, nämlich die Struktur einer *Lie-Algebra*. Dazu betrachten wir die Operation von  $G$  auf sich selbst durch *Konjugation*. Für  $g \in G$  definieren wir:

$$\begin{aligned} c_g: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gxg^{-1}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist ebenfalls differenzierbar, und da das neutrale Element  $e$  auf sich abgebildet wird, erhalten wir durch differenzieren an  $e$  eine lineare Abbildung

$\text{Ad}_g := d_e c_g: T_e G \rightarrow T_e G$ . Es stellt sich heraus, daß die entstehende Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Ad}: G &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G) \\ g &\mapsto \text{Ad}_g \end{aligned}$$

erneut differenzierbar ist und sogar eine Darstellung von  $G$  liefert, die *adjungierte Darstellung*. Das Bild von  $e$ , also  $\text{Ad}_e$ , ist die Identität. Wir differenzieren wieder am neutralen Element, und nach einer Identifikation  $T_{\text{id}} \text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G) = \text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G)$  erreichen wir eine lineare Abbildung

$$\text{ad}: T_e G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G).$$

Es ist üblich, für  $x, y \in T_e G$  folgende Abkürzung zu verwenden:

$$[x, y] := \text{ad}(x)(y) \in T_e G.$$

Die Abbildung  $[\cdot, \cdot]: T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G$  ist nun  $\mathbb{R}$ -bilinear. Wir verwenden von nun an die Notation  $\mathfrak{g} := T_e G$  immer dann, wenn wir an das Paar  $(T_e G, [\cdot, \cdot])$  denken.

Man kann nachrechnen, daß folgende Eigenschaften gelten:

- (1)  $[x, x] = 0$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$  (Anti-Symmetrie).
- (2)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  für alle  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  (Jacobi-Identität).

Dies sind die definierenden Axiome einer *Lie-Algebra*. Wir haben nun also aus einer Lie-Gruppe eine Lie-Algebra konstruiert (im Wesentlichen durch Differenzieren der Konjugationsabbildung).

**1.5. Darstellungen der Lie-Algebra.** Die Konstruktion der Lie-Algebra ist sogar *funktoriell*. Ist nämlich  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Lie-Gruppen (also ein *differenzierbarer* Homomorphismus von Gruppen), so gilt für das Differential am neutralen Element  $d_e f: T_e G \rightarrow T_e H$  und alle  $x, y \in T_e G$  die Gleichung

$$d_e f([x, y]) = [d_e f(x), d_e f(y)].$$

Also ist  $d_e f: \mathfrak{g} = T_e G \rightarrow \mathfrak{h} = T_e H$  ein *Homomorphismus von Lie-Algebren*.

Sei nun  $V$  ein reeller Vektorraum von endlicher Dimension  $n$ . Dann ist  $\text{GL}(V) \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(V) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$  eine offene Untermannigfaltigkeit. Insbesondere erhalten wir einen Identifikation

$$\mathfrak{gl}(V) := T_e \text{GL}(V) = T_e \text{End}_{\mathbb{R}}(V).$$

Man kann nachrechnen, daß die Lie-Algebren Struktur auf  $\mathfrak{gl}(V)$  unter dieser Identifikation gegeben ist durch den *Kommutator* von linearen Abbildungen:

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x.$$

(Übung: Man rechne nach, daß die so definierte Lie-Klammer tatsächlich anti-symmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt.)

Ist nun  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung der Lie-Gruppe  $G$ , so ist das Differential

$$d_e \rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V)$$

ein Homomorphismus von Lie-Algebren, wie wir oben gesehen haben. Dies nennt man auch eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Wir haben also jeder Darstellung der Lie-Gruppe  $G$  eine Darstellung ihrer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  zugeordnet.

Die Darstellungstheorien von  $G$  und von  $\mathfrak{g}$  sind eng verwandt. Wir können im Rahmen dieser Vorlesung nicht näher auf diese Beziehung eingehen. Der obige

Abriss der Darstellungstheorie soll uns genügen, um die Darstellungstheorie von Lie-Algebren zu motivieren.

## 2. L -A

Zunächst wollen wir an den Begriff einer Algebra über einem Körper  $k$  erinnern.

- Definition 2.1.** (1) Eine  $k$ -Algebra ist ein  $k$ -Vektorraum  $A$  zusammen mit einer  $k$ -bilinearen Abbildung  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(a, b) \mapsto a \cdot b$ , der *Multiplikation*.
- (2) Eine  $k$ -Algebra  $A$  heißt *assoziativ*, falls für alle  $a, b, c \in A$  gilt:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- (3) Eine  $k$ -Algebra  $A$  heißt *kommutativ*, falls für alle  $a, b \in A$  gilt:  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- (4) Eine  $k$ -Algebra  $A$  heißt *unitär*, falls es ein Element  $1 \in A$  gibt mit  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  für alle  $a \in A$ . Man nennt  $1$  das Einselement in  $A$ .

Wie immer muß man mit einer Klasse von Objekten auch gleich die zugehörige Klasse von Abbildungen definieren. Seien  $A$  und  $B$   $k$ -Algebren.

- Definition 2.2.** (1) Eine  $k$ -lineare Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heißt *Homomorphismus (von Algebren)*, falls für alle  $a, b \in A$  gilt:  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ .
- (2) Ein bijektiver Homomorphismus von Algebren heißt auch *Isomorphismus* (die inverse Abbildung ist dann ebenfalls ein Homomorphismus von Algebren). Die Algebren  $A$  und  $B$  heißen *isomorph*, falls ein Isomorphismus  $f: A \rightarrow B$  existiert.
- (3) Sind  $A$  und  $B$  unitäre Algebren mit Einselementen  $1_A \in A$  und  $1_B \in B$ , so heißt ein Homomorphismus von Algebren  $f$  *unitär*, falls  $f(1_A) = 1_B$  gilt.

- Beispiele 2.3.* (1) Der Polynomring  $k[X_i, i \in I]$  in beliebig vielen Veränderlichen ist eine kommutative, assoziative und unitäre  $k$ -Algebra.
- (2) Ist  $V$  ein  $k$ -Vektorraum, so wird der Raum der  $k$ -linearen Endomorphismen  $\text{End}_k(V)$  mit der Verkettung als Verknüpfung eine assoziative, unitäre, i.a. nicht kommutative  $k$ -Algebra.

**2.1. Definition von Lie-Algebren.** *Lie-Algebren* sind nun spezielle Algebren, die i.a. weder kommutativ, noch assoziativ, noch unitär sind.

**Definition 2.4.** Eine  $k$ -Lie-Algebra ist ein  $k$ -Vektorraum  $\mathfrak{g}$  zusammen mit einer  $k$ -bilinearen Abbildung  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , der *Lie-Klammer*, so daß gilt:

- (1) für alle  $x \in \mathfrak{g}$  ist  $[x, x] = 0$  (Antisymmetrie).
- (2) für alle  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  ist  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  (Jacobi-Identität).

Sind  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}'$  Lie-Algebren, so nennt man einen Homomorphismus  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  von Algebren auch einen Lie-Algebren-Homomorphismus.

*Übung 2.5.* Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei zweidimensionale  $\mathbb{C}$ -Lie-Algebren.

**Lemma 2.6.** *Ist  $A$  eine assoziative  $k$ -Algebra, so wird  $A$  mit dem Kommutator*

$$[x, y] := x \cdot y - y \cdot x \quad \text{für } x, y \in A$$

*als Lie-Klammer eine  $k$ -Lie-Algebra.*

*Übung 2.7.* Beweisen Sie dieses Lemma.

Ist  $A$  eine kommutative Algebra, so ist die Lie-Klammer natürlich konstant Null. Das motiviert die folgende Definition

**Definition 2.8.** Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt *abelsch*, falls  $[x, y] = 0$  für alle  $x, y \in \mathfrak{g}$  gilt.

*Beispiel 2.9.* Ist  $V$  ein  $k$ -Vektorraum, so haben wir schon gesehen, dass  $\text{End}_k(V)$  eine  $k$ -Algebra ist. Wir schreiben  $\mathfrak{gl}(V)$  statt  $\text{End}_k(V)$ , wenn wir uns diesen Raum als Lie-Algebra zusammen mit dem Kommutator als Lie-Klammer vorstellen.

*Übung 2.10.* Sei  $A$  eine  $k$ -Algebra. Eine  $k$ -Derivation ist eine  $k$ -lineare Abbildung  $\delta: A \rightarrow A$  mit der Eigenschaft  $\delta(a \cdot b) = a \cdot \delta(b) + \delta(a) \cdot b$ . Man zeige, daß mit  $\delta$  und  $\delta'$  auch  $\delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta \in \text{End}_k(A)$  eine Derivation ist, aber  $\delta \circ \delta'$  im allgemeinen nicht.

Ist  $A$  eine Algebra, so ist ein Untervektorraum  $U \subset A$  eine *Unteralgebra*, falls für alle  $x, y \in U$  gilt, daß  $x \cdot y \in U$ . Natürlich wird  $U$  mit der induzierten Verknüpfung dann ebenfalls eine Algebra. Eine Unteralgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  einer Lie-Algebra ist ebenfalls eine Lie-Algebra.

Im Folgenden werden für uns vor allem Unter-Lie-Algebren von  $\mathfrak{gl}(V)$  von Bedeutung sein. Wir schreiben insbesondere  $\mathfrak{gl}(n, k)$  für  $\mathfrak{gl}(k^n)$ .

*Beispiel 2.11.* (1) Jeder null- oder eindimensionale Unterraum  $V \subset \mathfrak{g}$  ist eine Unter-Lie-Algebra.

(2) Die Diagonalmatrizen, die oberen (oder unteren) Dreiecksmatrizen und die echten oberen (oder unteren) Dreiecksmatrizen bilden Unter-Lie-Algebren von  $\mathfrak{gl}(n, k)$ .

(3) Der Untervektorraum  $\mathfrak{sl}(n, k) \subset \mathfrak{gl}(n, k)$  aller Endomorphismen mit Spur Null ist eine Unter-Lie-Algebra.

(4) Sei  $f: k^n \times k^n \rightarrow k$  die Bilinearform gegeben durch die Einheitsmatrix, also

$$f((x_1, \dots, x_n)^T, (y_1, \dots, y_n)^T) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

So ist der Unterraum

$$\mathfrak{so}(n, k) := \{A \in \mathfrak{gl}(n, k) \mid f(Ax, y) + f(x, Ay) = 0 \quad \forall x, y \in k^n\}$$

eine Unter-Lie-Algebra von  $\mathfrak{gl}(n, k)$ .  $\mathfrak{so}(n, k)$  heißt die *orthogonale Lie-Algebra*.

(5) Sei  $f: k^{2n} \times k^{2n} \rightarrow k$  die Bilinearform gegeben durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ , also

$$f((x_1, \dots, x_{2n})^T, (y_1, \dots, y_{2n})^T) = x_1 y_{n+1} + \dots + x_n y_{2n} - x_{n+1} y_1 - \dots - x_{2n} y_n.$$

So ist der Unterraum

$$\mathfrak{sp}(2n, k) := \{A \in \mathfrak{gl}(2n, k) \mid f(Ax, y) + f(x, Ay) = 0 \quad \forall x, y \in k^{2n}\}$$

eine Unter-Lie-Algebra von  $\mathfrak{gl}(2n, k)$ .  $\mathfrak{sp}(2n, k)$  heißt die *symplektische Lie-Algebra*.

Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra.

**Definition 2.12.** Ein *Ideal* von  $\mathfrak{g}$  ist ein Untervektorraum  $I \subset \mathfrak{g}$  so daß für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $y \in I$  gilt:  $[x, y] \in I$ . Kurzschreibweise:  $[\mathfrak{g}, I] \subset I$ .

**Definition 2.13.** Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt *einfach*, wenn  $\mathfrak{g}$  nicht abelsch ist und kein von  $\{0\}$  und  $\mathfrak{g}$  verschiedenes Ideal in  $\mathfrak{g}$  existiert.

Das erste Hauptziel der Vorlesung ist die folgende Klassifikation von Killing für einfache *komplexe* (also  $\mathbb{C}$ -)Lie-Algebren.

**Satz 2.14.** Jede endlich dimensionale einfache komplexe Lie-Algebra ist isomorph zu genau einer der folgenden, einfachen Lie-Algebren:

- Typ  $A_n$ :  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  mit  $n \geq 1$ ,
- Typ  $B_n$ :  $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$  mit  $n \geq 2$ ,
- Typ  $C_n$ :  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$  mit  $n \geq 3$ ,
- Typ  $D_n$ :  $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$  mit  $n \geq 4$ ,
- oder den Lie-Algebren vom Typ  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$  (dies sind die fünf „Ausnahme“ Lie-Algebren).

Übung 2.15. Man bestimme die Dimension der Lie-Algebren der Serien  $A_n, B_n, C_n$  und  $D_n$ .

**2.2. Darstellungen von Lie-Algebren.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie Algebra (über dem Körper  $k$ ).

**Definition 2.16.** Eine *Darstellung* von  $\mathfrak{g}$  besteht aus einem  $k$ -Vektorraum  $V$  zusammen mit einem Homomorphismus

$$\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

von Lie-Algebren.

Wie zuvor notieren wir  $x.v = \rho(x)(v)$  für alle  $x \in \mathfrak{g}, v \in V$ .

- Beispiele 2.17.**
- (1) Ist  $V$  ein  $k$ -Vektorraum und  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  eine Unter-Lie-Algebra, so definiert diese Inklusion die Struktur einer Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf  $V$ . Man nennt dies die Standarddarstellung. Allgemeiner: Ist  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  und ist  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$  eine Unter-Lie Algebra, so definiert die Verkettung  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}'$ .
  - (2) Der Vektorraum  $k$  zusammen mit der Nullabbildung  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(k)$  definiert eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , die man die *triviale* Darstellung nennt.
  - (3) Sei  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_k(\mathfrak{g})$  die Abbildung, die  $x$  abbildet auf  $[x, \cdot]: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , die also  $y$  abbildet auf  $[x, y]$ . Dann ist  $\rho$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren, definiert also eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  (Übung!). Man nennt dies die *adjungierte Darstellung*. Das Bild von  $\mathfrak{g}$  unter  $\text{ad}$  ist übrigens enthalten im Teilraum der  $k$ -Derivationen auf der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ .

Seien  $V$  und  $V'$  Darstellungen von  $\mathfrak{g}$ .

- Definition 2.18.**
- (1) Eine  $k$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V'$  heißt *Homomorphismus von Darstellungen*, falls gilt:  $f(x.v) = x.f(v)$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $v \in V$ .
  - (2) Ein bijektiver Homomorphismus von Darstellungen heißt auch *Isomorphismus von Darstellungen*. Zwei Darstellungen  $V$  und  $V'$  heißen *isomorph*, falls ein Isomorphismus  $f: V \rightarrow V'$  existiert.

Sei  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ .

**Definition 2.19.** Ein Untervektorraum  $U \subset V$  heißt *Unterdarstellung*, falls für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $u \in U$  gilt:  $x.u \in U$ . Kurzschreibweise:  $\mathfrak{g}.U \subset U$ .

Natürlich ist eine Unterdarstellung auf natürliche Weise wieder eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ .

**Proposition 2.20.** Sei  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  und  $U \subset V$  eine Unterdarstellung. So gibt es auf dem Quotientenvektorraum  $V/U$  genau eine Struktur einer Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , so daß die kanonische Abbildung  $V \rightarrow V/U$  ein Homomorphismus von Darstellungen wird.

*Beweis.* Übung. □

**Definition 2.21.** Eine Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  heißt *einfach*, wenn  $V \neq \{0\}$  und wenn  $\{0\} \subset V$  und  $V \subset V$  die einzigen Unterdarstellungen von  $V$  sind.

**2.3. Einfache Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2, k)$  endlicher Dimension.** Wir betrachten in diesem Abschnitt Darstellungen der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2, k)$ . Zunächst definieren die folgenden Elemente aus  $\mathfrak{sl}(2, k)$ :

$$e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(e, f, h)$  bildet offenbar eine Basis von  $\mathfrak{sl}(2, k)$ . Es gelten die folgenden Formeln für die Kommutatoren:

$$\begin{aligned} [e, f] &= h \\ [h, e] &= 2e \\ [h, f] &= -2f \end{aligned}$$

(Übung: Man rechne diese Relationen nach.)

Sei nun  $\rho: \mathfrak{sl}(2, k) \rightarrow \text{End}_k(V)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, k)$ . Dann definiert jedes  $x \in \mathfrak{g}$  eine lineare Abbildung  $\rho(x): V \rightarrow V$ . Wir betrachten nun speziellerweise die durch unser oben definiertes Element  $h$  gegebene. Für  $\lambda \in k$  sei

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \rho(h)(v) = \lambda v\}$$

der Eigenraum von  $V$  zum Eigenwert  $\lambda$  bzgl. der Abbildung  $\rho(h)$ .

**Lemma 2.22.** Für jedes  $\lambda \in k$  gilt  $\rho(e)(V_\lambda) \subset V_{\lambda+2}$  und  $\rho(f)(V_\lambda) \subset V_{\lambda-2}$ .

*Beweis.* Sei  $v \in V_\lambda$ . So ist

$$\begin{aligned} \rho(h)\rho(e)(v) &= \rho([h, e])(v) + \rho(e)\rho(h)(v) \\ &= 2\rho(e)(v) + \lambda\rho(e)(v) \\ &= (\lambda + 2)\rho(e)(v). \end{aligned}$$

Also ist  $\rho(e)(v) \in V_{\lambda+2}$ . Die Aussage für  $f$  beweist man analog. □

Der folgende Satz klassifiziert die einfachen Darstellungen der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2, k)$  für einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

**Satz 2.23.** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null.

(1) Die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Endlich dimensionale} \\ \text{einfache Darstellungen} \\ \text{von } \mathfrak{sl}(2, k) \\ \text{bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$$

$$V \mapsto \dim V$$

ist eine Bijektion. Im Folgenden sei  $L(n)$  die einfache Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, k)$  der Dimension  $n + 1$  für  $n \geq 0$ .

(2)  $L(n)$  zerfällt unter der Operation von  $h \in \mathfrak{sl}(2, k)$  in seine Eigenräume:

$$L(n) = L(n)_{-n} \oplus L(n)_{-n+2} \oplus \cdots \oplus L(n)_n$$

und es gilt  $\dim L(n)_i = 1$  für  $i = -n, -n+2, \dots, n$ .

(3) Ist  $L(n)_i \neq 0$  und  $L(n)_{i+2} \neq 0$ , so induzieren die Operationen von  $e$  und  $f$  Isomorphismen

$$L(n)_i \xrightarrow{\rho(e)} L(n)_{i+2}, \quad L(n)_{i+2} \xrightarrow{\rho(f)} L(n)_i.$$

*Beispiele 2.24.* (1)  $L(1)$  ist offenbar die triviale Darstellung. (Übung: Man zeige, daß es bis auf Isomorphie keine weitere Darstellung der Dimension 1 geben kann. Anleitung: Man zeige, daß  $h = [e, f]$  durch Null operieren muss. Dann nutze man die Kommutatorregeln  $[h, e] = 2e$  und  $[h, f] = -2f$  aus.)

(2) Die Standarddarstellung  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$  ist offenbar die einfache Darstellung der Dimension 2.

(3) Die adjungierte Darstellung  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  ist die einfache Darstellung von Dimension 3.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, daß je zwei einfache Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , die dieselbe endliche Dimension haben, isomorph sind.

Sei dazu  $V$  irgendeine endlich dimensionale Darstellung. Wie in Lemma 2.22 definieren wir für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  den Eigenraum  $V_\lambda \subset V$  zum Eigenwert  $\lambda$  unter der linearen Abbildung  $\rho(h)$ . Da  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen ist, gibt es mindestens ein  $\lambda$  mit  $V_\lambda \neq \{0\}$ . Da  $V$  endlich dimensional ist, gibt es ein  $\lambda$  mit  $V_\lambda \neq \{0\}$  und  $V_{\lambda+2} = \{0\}$ . Wir fixieren nun dieses  $\lambda$  und wählen einen Vektor  $v \in V_\lambda, v \neq 0$ .

Dann betrachten wir die Vektoren der Form  $f^i.v = \rho(f)^i(v), i \geq 0$ . die Kommutatorregeln liefern folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} h.f^i.v &= (\lambda - 2i)f^i.v \\ e.f^i.v &= i(\lambda - i + 1)f^{i-1}.v \end{aligned}$$

Insbesondere spannen die Vektoren  $f^i.v, i \geq 0$  eine Unterdarstellung von  $V$  auf. Ist  $f^i.v \neq 0$ , dann sind  $v, f.v, \dots, f^i.v$  nicht Null und Eigenvektoren von  $h$  zu verschiedenen Eigenwerten, also linear unabhängig. Es gibt also ein kleinstes  $n \geq 0$  mit  $f^{n+1}v = 0$ . Dann ist  $v, f.v, \dots, f^n.v$  eine Basis einer Unterdarstellung von  $V$ . Ist  $V$  nun einfach, so haben wir damit eine Basis von  $V$  konstruiert. Insbesondere ist  $n = \dim V - 1$ .

Außerdem haben wir die Operation von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  in dieser Basis explizit angegeben. Als Parameter taucht in diesen Matrizen noch die komplexe Zahl  $\lambda$  auf. Aus  $f^{n+1}v = 0$  folgt  $0 = e.f^{n+1}v = (n+1)(\lambda - n)f^n.v$ , und da wir  $f^n.v \neq 0$  angenommen haben, erhalten wir  $\lambda = n = \dim V - 1$ . Damit hängen unsere Matrizen für die Abbildungen  $\rho(e), \rho(h)$  und  $\rho(f)$  nur von  $\dim V$  ab. Insbesondere sind zwei Darstellungen der gleichen Dimension isomorph und wir haben die Aussagen (2) und (3) unseres Satzes explizit nachgeprüft.

Es bleibt zu zeigen, daß es zu jeder Dimension  $n$  auch tatsächlich eine einfache Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  gibt. Dazu betrachten wir zunächst den Polynomring  $\mathbb{C}[X, Y]$  in zwei Variablen. Man rechnet leicht nach, daß die Abbildung  $\rho: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow$

$\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X, Y])$  mit

$$\begin{aligned}\rho(e) &= X\partial_Y, \\ \rho(f) &= Y\partial_X, \\ \rho(h) &= X\partial_X - Y\partial_Y\end{aligned}$$

ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, also eine (unendlich dimensionale) Darstellung definiert. Dazu muß man nur die Kommutatoren zwischen den Derivationen ausrechnen. Es ist beispielsweise

$$\begin{aligned}[X\partial_Y, Y\partial_X] &= X\partial_Y \circ Y\partial_X - Y\partial_X \circ X\partial_Y \\ &= X\partial_X - XY\partial_Y\partial_X - Y\partial_Y - YX\partial_X\partial_Y \\ &= X\partial_X - Y\partial_Y,\end{aligned}$$

da  $\partial_X\partial_Y = \partial_Y\partial_X$ .

Sei  $\mathbb{C}[X, Y]_n \subset \mathbb{C}[X, Y]$  der Untervektorraum der homogenen Polynome vom Grad  $n$ . Dieser Raum ist offenbar eine Unterdarstellung der Dimension  $n + 1$ , da unsere Derivationen den Grad eines homogenen Polynoms nicht ändern. Wir behaupten, daß diese Unterdarstellung einfach ist. Nun ist  $X^{n-i}Y^i$  ein Eigenvektor unter  $\rho(h) = X\partial_X - Y\partial_Y$  zum Eigenwert  $n - 2i$ . Also taucht jeder Eigenwert von  $\rho(h)$  mit Multiplizität eins auf. Eine Unterdarstellung wird also notwendigerweise aufgespannt durch Monome. Nun folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\rho(e)(X^{n-i}Y^i) &= X\partial_Y(X^{n-i}Y^i) \\ &= iX^{n-i+1}Y^{i-1} \\ \rho(f)(X^{n-i}Y^i) &= Y\partial_X(X^{n-i}Y^i) \\ &= (n-i)X^{n-i-1}Y^{i+1}\end{aligned}$$

daß eine Unterdarstellung mit einem Monom auch alle anderen enthalten muß. Also ist  $\mathbb{C}[X, Y]_n$  einfach.  $\square$

### 3. N " L -A

Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über dem Körper  $k$ . Sind  $I, J \subset \mathfrak{g}$  Untervektorräume, so definieren wir  $[I, J] \subset \mathfrak{g}$  als den von allen Elementen  $[x, y]$  mit  $x \in I$  und  $y \in J$  aufgespannten Untervektorraum. Sind  $I$  und  $J$  Ideale von  $\mathfrak{g}$ , dann ist auch  $[I, J]$  ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ .

**Definition 3.1.** (1) Die *absteigende Zentralreihe*

$$\mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \dots$$

von  $\mathfrak{g}$  ist induktiv durch  $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$  definiert.

(2) Die *abgeleitete Reihe*

$$\mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots$$

von  $\mathfrak{g}$  ist induktiv durch  $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$  definiert.

Per Induktion folgt, daß sowohl  $\mathfrak{g}^i$  als auch  $\mathfrak{g}^{(i)}$  für alle  $i \geq 0$  Ideale in  $\mathfrak{g}$  sind, und daß  $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$ .

**Definition 3.2.** Die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt

(1) *auflösbar*, falls  $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$  für  $i \gg 0$ ,

(2) nilpotent, falls  $g^i = 0$  für  $i \gg 0$ .

Wegen  $g^{(i)} \subset g^i$  ist jede nilpotente Lie-Algebra auflösbar.

**Lemma 3.3.** *Jede Unter-Lie-Algebra und jedes Bild einer nilpotenten Lie-Algebra ist nilpotent. Jede Unter-Lie-Algebra und jedes Bild einer auflösbaren Lie-Algebra ist auflösbar.*

*Bemerkung 3.4.* Unter „Bild einer Lie-Algebra“ verstehen wir das Bild einer Lie-Algebra  $g$  unter einem beliebigen Homomorphismus  $f: g \rightarrow g'$  von Lie-Algebren. Das Bild ist offensichtlich wieder eine Lie-Algebra.

*Beweis.* Die Aussage bzgl. Unter-Lie-Algebren folgen sofort aus den Definitionen. Induktiv zeigt man leicht  $f(g)^{(i)} = f(g^{(i)})$  und  $f(g)^i = f(g^i)$  für alle Homomorphismen  $f: g \rightarrow g'$  und alle  $i$ . Daraus folgt die Aussage über die Bilder.  $\square$

*Beispiele 3.5.* (1) Die Lie-Algebra  $b(n, k)$  der oberen Dreiecksmatrizen in  $gl(n, k)$  ist auflösbar.

(2) Die Lie-Algebra  $n(n, k)$  der echten oberen Dreiecksmatrizen in  $gl(n, k)$  ist nilpotent.

**3.1. Nilpotente Lie-Algebren und der Satz von Engel.** Der nächste Satz stellt eine verblüffende Verbindung her zwischen nilpotenten Endomorphismen und nilpotenten Lie-Algebren.

**Satz 3.6.** *Sei  $k$  ein Körper,  $V \neq 0$  ein endlich dimensionaler  $k$ -Vektorraum und  $g \subset gl(V)$  eine Unter-Lie-Algebra, so daß jedes  $x \in g$  ein nilpotenter Endomorphismus auf  $V$  ist. Dann gibt es eine Basis von  $V$ , bzgl. derer alle Elemente aus  $g$  durch echte obere Dreiecksmatrizen gegeben sind.*

Wir folgern dieses Satz aus folgender Proposition

**Proposition 3.7.** *Sei  $g \subset gl(V)$  wie im Satz. Dann gibt es einen Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  mit  $x(v) = 0$  für alle  $x \in g$ .*

*Bemerkung 3.8.* Natürlich gibt es für jeden nilpotenten Endomorphismus  $f \in \text{End}(V)$  einen Vektor  $v \neq 0$  mit  $f(v) = 0$ . Es stimmt aber im Allgemeinen nicht, daß es für zwei nilpotente Endomorphismen  $f, g \in \text{End}(V)$  einen gemeinsamen Vektor  $v \neq 0$  mit  $f(v) = g(v) = 0$  gibt. Die obige Proposition sagt nun insbesondere, daß, wenn  $f$  und  $g$  eine Unter-Lie-Algebra in  $\text{End}(V)$  erzeugen, deren Elemente allesamt nilpotent sind, es solch einen Vektor doch gibt.

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach der Dimension von  $g$ . Im Fall  $\dim g = 0$  ist nichts zu zeigen. Sei also  $\dim g \geq 1$ . Dann gibt es eine maximale echte Unter-Lie-Algebra  $g' \subset g$ ,  $g' \neq g$  (der Fall  $g' = 0$  ist natürlich erlaubt). Nun betrachten wir die Darstellung  $\rho: g' \rightarrow gl(g)$  von  $g'$  auf dem Vektorraum  $g$ , die gegeben ist durch  $\rho(x) = [x, \cdot]$ . Hier ist  $g' \subset g$  eine Unterdarstellung, da ja  $g'$  eine Unter-Lie-Algebra von  $g$  ist. Also können wir die Quotientendarstellung  $\bar{\rho}: g' \rightarrow g/g'$  bilden.

Wir behaupten nun, daß  $\bar{\rho}(g') \subset gl(g/g')$  eine Unter-Lie-Algebra aus nilpotenten Endomorphismen ist. Sogar allgemeiner gilt folgendes Lemma:

**Lemma 3.9.** *Sei  $f: V \rightarrow V$  ein nilpotenter Endomorphismus. Dann ist auch die Abbildung  $\text{ad}(f): \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ ,  $g \mapsto f \circ g - g \circ f$  nilpotent.*

*Beweis.* Seien  $\lambda_f, \rho_f: \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$  die Linksverketzung bzw. Rechtsverketzung mit  $f$ . Dann sind  $\lambda_f$  und  $\rho_f$  offensichtlich nilpotent. Außerdem gilt  $\lambda_f \circ \rho_f = \rho_f \circ \lambda_f$ . Die Verknüpfung kommutierender nilpotenter Endomorphismen ist aber nilpotent.  $\square$

Wir haben nun also gezeigt, daß  $\bar{\rho}(g') \subset \mathfrak{gl}(g/g')$  eine Unter-Lie-Algebra bestehend aus nilpotenten Endomorphismen ist. Wegen  $\dim g' < \dim g$  können wir unsere Induktionsvoraussetzung anwenden. Es gibt also einen Vektor  $\bar{x} \in g/g', \bar{x} \neq 0$  mit  $\bar{\rho}(g')(\bar{x}) = 0$ . Sei  $x \in g$  ein Urbild von  $\bar{x}$ . Dann ist also  $x \notin g'$  und  $[g', x] \subset g'$ .

Der Unterraum  $g' \oplus kx \subset g$  ist also eine Unter-Lie-Algebra. Wegen der Maximalität von  $g'$  ist also  $g' \oplus kx = g$ . Nun benutzen wir nochmals die Induktionsannahme und folgern, daß

$$W := \{v \in V \mid g'v = 0\} \neq 0.$$

Ist  $v \in W$ , so ist  $x(v) \in W$ , denn für alle  $y \in g'$  gilt

$$y(x(v)) = [y, x](v) + x(y(v)) = 0 + 0 = 0,$$

denn  $[y, x] \in g'$ . Nun ist  $x \in \text{End}(V)$  aber nilpotent, also ist auch die Einschränkung  $x \in \text{End}(W)$  nilpotent. Es existiert also ein  $v \in W, v \neq 0$  mit  $x(v) = 0$ . Für dieses  $v$  gilt aber dann  $g(v) = 0$ . Das war zu zeigen.  $\square$

Wir zeigen nun, wie Satz 3.6 aus der Proposition 3.7 folgt.

*Beweis.* Die Aussage des Satzes ist äquivalent zu folgender Aussage: *Es gibt eine Kette von Untervektorräumen*

$$0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$$

mit  $\dim V_i = i$  und  $g(V_i) \subset V_{i-1}$  für  $i \geq 1$

Wir zeigen nun diese zweite Aussage. Nach dem Satz gibt es ein  $v \in V, v \neq 0$  mit  $gv = 0$ . Sei  $V_1$  der von solch einem  $v$  aufgespannte Unterraum. Dann ist  $V_1$  natürlich eine Unterdarstellung und wir können die Darstellung  $V/V_1$  betrachten. Auf dieser Darstellung operiert  $g$  natürlich ebenfalls durch nilpotente Endomorphismen. Per Induktion finden wir eine Kette

$$0 \subset \bar{V}_1 \subset \dots \subset \bar{V}_{n-1} = V/V_1.$$

Nun sei  $V_{i+1} \subset V$  das Urbild von  $\bar{V}_i$ . Die Kette

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$$

erfüllt offenbar unsere Bedingungen.  $\square$

**Definition 3.10.** Ein Element  $x \in g$  heißt *ad-nilpotent*, falls der Endomorphismus  $\text{ad}(x): g \rightarrow g$  nilpotent ist.

*Beispiel 3.11.* Die Elemente  $e$  und  $f$  in  $\mathfrak{sl}(2, k)$ , die wir in Abschnitt 2.3 definiert haben, sind ad-nilpotent, das Element  $h$  aber nicht.

**Satz 3.12** (Satz von Engel). *Eine endlich dimensionale Lie-Algebra ist nilpotent genau dann, wenn jedes ihrer Elemente ad-nilpotent ist.*

*Beweis.* Sei  $g$  eine nilpotente Lie-Algebra. Dann ist also  $g^i = 0$  für ein  $i$ . Das bedeutet, daß für beliebige  $x_1, \dots, x_{i+1} \in g$  der verkettete Kommutator verschwindet:

$$[x_1, [x_2, [\dots, [x_i, x_{i+1}] \dots]]] = 0.$$

Setzen wir insbesondere  $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x$ , so ist also  $\text{ad}(x)^i = 0$ ,  $\text{ad}(x)$  also nilpotent und  $x$  damit ad-nilpotent für jedes  $x \in \mathfrak{g}$ .

Sei nun umgekehrt jedes  $x$  ad-nilpotent. Das bedeutet, daß das Bild  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  aus nilpotenten Endomorphismen besteht. Nach Satz 3.6 können wir eine Basis von  $\mathfrak{g}$  wählen, so daß  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  aus echten oberen Dreiecksmatrizen besteht, also eine Unter-Lie-Algebra einer nilpotenten Lie-Algebra ist, also selbst eine nilpotente Lie-Algebra ist. Also ist  $\text{ad}(\mathfrak{g})^i = 0$ , also  $\text{ad}(\mathfrak{g}^i) = \text{ad}(\mathfrak{g})^i = 0$  und damit  $\mathfrak{g}^{i+1} = 0$ . Also ist  $\mathfrak{g}$  eine nilpotente Lie-Algebra.  $\square$

### 3.2. Auflösbare Lie-Algebren und der Satz von Lie.

**Satz 3.13.** *Sei  $\mathbb{C}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null,  $V \neq \{0\}$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  eine auflösbare Unter-Lie-Algebra. Dann gibt es eine Basis von  $V$ , bzgl. derer  $\mathfrak{g}$  aus oberen Dreiecksmatrizen besteht.*

Wie zuvor folgern wir den obigen Satz aus der nachfolgenden Proposition.

**Proposition 3.14.** *Sei  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  wie im Satz. Dann gibt es einen simultanen Eigenvektor für alle Elemente aus  $\mathfrak{g}$ , also einen Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , mit  $\mathfrak{g}(v) \subset \mathbb{C}v$ .*

*Beweis.* Wir beweisen diesen Satz per Induktion nach  $\dim \mathfrak{g}$ . Im Fall  $\dim \mathfrak{g} = 0$  können wir jeden Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , nehmen. Sei also  $\dim \mathfrak{g} > 0$ . Da  $\mathfrak{g}$  auflösbar ist, gilt  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ . Dann ist  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  eine abelsche Lie-Algebra positiver Dimension. Sei  $\bar{I} \subset \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  ein Teilraum der Kodimension 1. Wegen der Kommutativität von  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  ist  $\bar{I}$  auch ein Ideal in  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Sei  $I \subset \mathfrak{g}$  das Urbild von  $\bar{I}$  unter der kanonischen Abbildung  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Dann ist  $I$  ein Ideal in  $\mathfrak{g}$  der Kodimension 1.

Natürlich ist  $I$  ebenfalls auflösbar, nach Induktionsvoraussetzung gibt es also ein  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  mit  $I(v) \subset \mathbb{C}v$ . Es gibt also eine Linearform  $\lambda: I \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $x(v) = \lambda(x)v$  für alle  $x \in I$ . Sei

$$V_\lambda = \{v \in V \mid x(v) = \lambda(x)v \text{ für alle } x \in I\}$$

der zugehörige simultane Eigenraum. Wir behaupten nun  $\mathfrak{g}(V_\lambda) \subset V_\lambda$ . Wenn dies gezeigt ist, dann folgt die Behauptung des Satzes, denn schreiben wir  $\mathfrak{g} = I \oplus \mathbb{C}x$  für einen Vektor  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $x \notin I$ , so brauchen wir nur einen Eigenvektor von  $x$  in  $V_\lambda$  zu finden, um die Aussage des Satzes zu bestätigen.

Wir müssen also zeigen, daß für  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $y \in I$  und  $v \in V_\lambda$  gilt:

$$y(x(v)) = \lambda(y)x(v).$$

Wir brauchen diese Formel natürlich nur für  $v \neq 0$  zu prüfen. Sei nun

$$W_i := \mathbb{C}\{v, x(v), \dots, x^i(v)\},$$

also der von den Elementen  $v, x(v), \dots, x^i(v)$  in  $V$  aufgespannte Teilraum. Per Induktion zeigt man für alle  $i \geq 0$

$$y(x^i(v)) \in x^i y(v) + W_{i-1}.$$

Wegen  $y(v) = \lambda(y)v$  können wir also folgern, daß jedes  $W_i$  invariant unter  $I$  ist. Außerdem finden wir eine Basis von  $W_i$ , so daß die Operation von allen  $y \in I$  gegeben ist durch obere Dreiecksmatrizen mit dem Wert  $\lambda(y)$  auf der Diagonalen.

Sei nun  $n \geq 0$  maximal, so daß  $\dim W_n = n$ . Dann ist  $W_n$  auch stabil unter der Operation von  $x$ , also auch unter  $[x, y]$ . Wegen  $[x, y] \in I$  operiert  $[x, y]$  auf  $W_n$  also mit Spur  $(n + 1)\lambda([x, y])$ . Da die Spur eines Kommutators aber immer Null ist und da  $\mathbb{C}$  Charakteristik Null hat, gilt

$$\lambda([x, y]) = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} y(x(v)) &= x(y(v)) + [y, x](v) \\ &= \lambda(y)x(v) + \lambda([y, x])(v) \\ &= \lambda(y)x(v). \end{aligned}$$

Dies ist, was wir zeigen wollten. □

**Corollary 3.15.** *Ist  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale auflösbare Lie-Algebra, so ist  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  nilpotent.*

Aus Satz 3.13 können wir folgendes Resultat folgern.

**Satz 3.16** (Satz von Lie). *Jede einfache endlich dimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Lie-Algebra ist eindimensional.*

#### 4. K " A "

**4.1. Die Killing-Form.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra.

**Definition 4.1.** Die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \text{Spur}(\text{adx} \circ \text{ady}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

heißt die *Killing-Form* auf  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 4.2.** *Die Killing-Form hat folgende Eigenschaften:*

- (1) Für alle  $x, y \in \mathfrak{g}$  gilt  $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$  (Symmetrie).
- (2) Für alle  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  gilt  $\kappa(x, [y, z]) = \kappa([x, y], z)$  (Invarianz).

*Übung 4.3.* Man berechne die Killing-Form von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  und zeige, daß sie nicht ausgeartet ist.

*Übung 4.4.* Die Killing-Form einer endlich dimensionalen nilpotenten Lie-Algebra ist konstant Null.

Der folgende Satz liefert ein nützliches Kriterium für die Auflösbarkeit einer komplexen endlich dimensional Lie-Algebra.

**Satz 4.5.** *Sei  $\mathfrak{g}$  eine komplexe endlich dimensionale Lie-Algebra. Genau dann ist  $\mathfrak{g}$  auflösbar, wenn gilt*

$$\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0.$$

Wir werden obigen Satz aus dem folgenden folgern.

**Satz 4.6.** (Kriterium von Cartan) *Sei  $V$  ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum. Eine Unter-Lie-Algebra  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  ist genau dann auflösbar, wenn  $\text{Spur}(xy) = 0$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  gilt.*

Bevor wir das Kriterium von Cartan beweisen, folgern wir daraus Satz 4.5.

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{g}$  eine komplexe endlich dimensionale auflösbare Lie-Algebra. Dann ist auch  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \text{gl}(\mathfrak{g})$  auflösbar. Nach Satz 3.13 gibt es eine Basis von  $\mathfrak{g}$  bzgl. derer  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  in den oberen Dreiecksmatrizen liegt. Dann liegt  $[\text{ad}(\mathfrak{g}), \text{ad}(\mathfrak{g})]$  aber in den echten oberen Dreiecksmatrizen, was  $\text{Spur}(\text{ad}x \circ \text{ad}y) = 0$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  zeigt.

Sei umgekehrt nun  $\mathfrak{g}$  eine komplexe endlich dimensionale Lie-Algebra mit der Eigenschaft  $\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ . Nach dem Cartan Kriterium ist dann  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \text{gl}(\mathfrak{g})$  eine auflösbare Unter-Lie-Algebra. Wegen  $\text{ad}(\mathfrak{g}^{(n)}) = \text{ad}(\mathfrak{g})^{(n)}$  ist also  $\text{ad}(\mathfrak{g}^{(n)}) = 0$  für ein  $n \gg 0$  und damit  $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}] = 0$ , also ist  $\mathfrak{g}$  auflösbar.  $\square$

Nun müssen wir noch das Auflösbarkeitskriterium von Cartan zeigen.

**4.2. Erinnerung: halbeinfache und nilpotente Endomorphismen.** wir erinnern an eines der Hauptergebnisse der linearen Algebra, die *Jordan-Zerlegung*.

**Satz 4.7.** *Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

- (1) *Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $k$ -Vektorraum und  $x: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Dann gibt es eindeutig bestimmte Abbildungen  $x_s, x_n: V \rightarrow V$  mit folgenden Eigenschaften:*
  - (a)  $x = x_s + x_n$ .
  - (b)  $x_s$  ist diagonalisierbar und  $x_n$  ist nilpotent.
  - (c) Es gilt  $x_s \circ x_n = x_n \circ x_s$ .
- (2) *Sind  $V$  und  $W$  endlich dimensionale  $k$ -Vektorräume und sind  $x \in \text{End}_k(V)$ ,  $y \in \text{End}_k(W)$  und  $f \in \text{Hom}_k(V, W)$  gegeben, sodaß  $f \circ x = y \circ f$ , so gilt auch  $f \circ x_s = y_s \circ f$  und  $f \circ x_n = y_n \circ f$ .*

*Beweis.* Für  $\lambda \in k$  und  $x \in \text{End}_k(V)$  sei

$$H(\lambda, x) = \{v \in V \mid (x - \lambda)^n(v) = 0 \text{ für } n \gg 0\}$$

der Hauptraum zu  $\lambda$ . Dann ist  $V = \bigoplus_{\lambda \in k} H(\lambda, x)$ . Definieren wir nun  $x_s \in \text{End}_k(V)$  so, daß  $x_s$  auf  $H(\lambda, x)$  durch Multiplikation mit  $\lambda$  operiert, so ist  $x_s$  diagonalisierbar,  $x_n := x - x_s$  nilpotent und  $x_s \circ x_n = x_n \circ x_s$ . Damit ist die Existenzbehauptung im Teil (1) des Satzes gezeigt.

Bevor wir die Eindeutigkeit der obigen Zerlegung zeigen, beweisen wir Teil (2) des Satzes für die eben definierten  $x_s$  und  $x_n$ .

Seien also  $x, y$  und  $f$  wie im Teil (2) des Satzes gegeben. So bildet  $f$  für jedes  $\lambda \in k$  den Hauptraum  $H(\lambda, x)$  in den Hauptraum  $H(\lambda, y)$  ab. Dann gilt sicherlich  $f \circ x_s = y_s \circ f$ , also auch  $f \circ x_n = y_n \circ f$ . Damit ist Teil (2) für unsere speziellen  $x_s$  und  $x_n$  bzw.  $y_s$  und  $y_n$  gezeigt.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeitsaussage in Teil (1). Sei dazu  $x = x'_s + x'_n$  eine weitere Zerlegung mit  $x'_s$  diagonalisierbar,  $x'_n$  nilpotent und  $x'_s \circ x'_n = x'_n \circ x'_s$ . Insbesondere kommutiert  $x_s$  dann mit dem Endomorphismus  $x$ , nach Teil (2) also auch mit  $x'_s$ . Damit ist  $x_s - x'_s$  ein diagonalisierbarer Endomorphismus. Analog erkennt man, daß  $x_n - x'_n$  ein nilpotenter Endomorphismus ist. Dann ist

$$x_s - x'_s = x_n - x'_n$$

ein diagonalisierbarer und nilpotenter Endomorphismus, also Null.  $\square$

**Lemma 4.8.** Für  $x \in \text{End}(V)$  gilt  $\text{im } x_s \subset \text{im } x$ .

*Beweis.* Da  $x$  und  $x_s$  jeden Hauptraum stabilisieren, können wir  $V = H(\lambda, x)$  annehmen. Ist  $\lambda = 0$ , so ist  $\text{im } x_s = 0$ . Ist  $\lambda \neq 0$ , so ist  $\text{im } x = V$ . In beider Fällen ist die Aussage des Lemmas offensichtlich.  $\square$

**Lemma 4.9.** Für  $x \in \text{End}(V)$  ist

$$\text{ad}(x) = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$$

die Jordan-Zerlegung von  $\text{ad}(x)$  in  $\text{End}(\text{End}(V))$ , es gilt also

$$\text{ad}(x)_s = \text{ad}(x_s), \quad \text{ad}(x)_n = \text{ad}(x_n).$$

*Beweis.* Zunächst ist  $\text{ad}(x_n)$  nilpotent nach Lemma 3.9, und  $\text{ad}(x_s)$  und  $\text{ad}(x_n)$  kommutieren, da  $x_s$  und  $x_n$  dies tun. Wir müssen also nur noch zeigen, daß  $\text{ad}(x_s)$  diagonalisierbar ist. Wählen wir eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  aus Eigenvektoren von  $x_s$ , so identifizieren wir  $\text{gl}(V)$  mit  $\text{Mat}(n \times n, V)$ . Die Standardmatrizen  $E_{ij}$  sind dann Eigenvektoren der Operation von  $\text{ad}(x_s)$ , denn ist  $\lambda$  der Eigenwert von  $v_i$  (unter  $x_s$ ) und  $\mu$  der Eigenwert von  $v_j$ , so ist  $\lambda - \mu$  der Eigenwert von  $E_{ij}$  unter  $\text{ad}(x_s)$ , wie man an folgender Gleichung sieht:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda - \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Wir werden das Cartan-Kriterium aus folgendem Lemma folgern:

**Lemma 4.10.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum und seien  $A \subset B \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  zwei Untervektorräume. Sei  $x \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  so, daß  $\text{ad}(x)(B) \subset A$ . Gilt  $\text{Spur}(xz) = 0$  für alle  $z \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  mit  $\text{ad}(z)(B) \subset A$ , dann ist  $x$  nilpotent.

*Beweis.* Sei  $x = x_s + x_n$  die Jordan-Zerlegung von  $x$ . Nach Lemma 4.9 ist  $\text{ad}(x)_s = \text{ad}(x_s)$ . Nach Lemma 4.8 gilt  $\text{ad}(x)_s(B) \subset \text{ad}(x)(B) \subset A$ . Also gilt  $\text{ad}(x_s)(B) \subset A$ . Damit liegen also alle Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten von  $\text{ad}(x_s)$  in  $A$ .

Nun sei  $z \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  dadurch definiert, daß  $z$  auf einem Eigenvektor von  $x_s$  zum Eigenwert  $\lambda$  durch Multiplikation mit dem komplex konjugierten Wert  $\bar{\lambda}$  operiert. Dann ist der Eigenraum von  $\text{ad}(x_s)$  zum Eigenwert  $\lambda$  auch der Eigenraum von  $\text{ad}(z)$  zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$ . Da nun alle Eigenräume zu  $\lambda \neq 0$  schon in  $A$  enthalten sind, gilt  $\text{ad}(z)(B) \subset A$ .

Nach unseren Voraussetzungen ist  $\text{Spur}(xz) = 0$ . Diese Spur ist aber die Summe der Ausdrücke  $\lambda \bar{\lambda}$ , wobei  $\lambda$  die Eigenwerte von  $x$  mit Multiplizitäten durchläuft. Damit ist Null der einzige Eigenwert von  $x$ , also ist  $x$  nilpotent.  $\square$

*Beweis des Cartan-Kriteriums.* Ist  $\mathfrak{g}$  auflösbar, so gibt es eine Basis von  $V$ , bzgl. derer  $\mathfrak{g}$  gegeben ist durch obere Dreiecksmatrizen. Dann ist  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  gegeben durch echte obere Dreiecksmatrizen, ebenso wie jedes Element  $xy$  mit  $x \in \mathfrak{g}$  und  $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Daraus folgt  $\text{Spur}(xy) = 0$ .

Gelte nun umgekehrt  $\text{Spur}(xy) = 0$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Wir zeigen nun, daß jedes  $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  nilpotent ist. Nach Satz 3.6 ist  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  dann nilpotent, also  $\mathfrak{g}$

auflösbar. Nun betrachten wir die Inklusionen  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} \subset \text{End}(V)$  und zeigen, daß für alle  $z \in \text{End}(V)$  mit  $[z, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  gilt, daß  $\text{Spur}(yz) = 0$ . Nach dem Lemma 4.10 ist  $y$  dann nilpotent.

Wir wählen also ein solches  $z$ . Ist  $y = \sum [a_i, b_i]$  mit  $a_i, b_i \in \mathfrak{g}$ , so ist

$$\text{Spur}(yz) = \sum \text{Spur}([a_i, b_i]z) = \sum \text{Spur}(a_i[b_i, z]) = 0$$

nach Voraussetzung, denn  $a_i \in \mathfrak{g}$  und  $[b_i, z] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . (Man beachte  $\text{Spur}([a, b]c) = \text{Spur}(abc - bac) = \text{Spur}(abc - acb) = \text{Spur}(a[b, c])$  wegen  $\text{Spur}(bac) = \text{Spur}(acb)$ .)  $\square$

5. H

L -A

**Satz 5.1.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale komplexe Lie-Algebra. Dann sind gleichbedeutend:

- (1)  $\mathfrak{g}$  besitzt kein von Null verschiedenes abelsches Ideal.
- (2)  $\mathfrak{g}$  besitzt kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal.
- (3)  $\mathfrak{g}$  ist als Lie-Algebra isomorph zu einer Summe einfacher Lie-Algebren.
- (4)  $\mathfrak{g}$  ist die direkte Summe von Idealen, die als Lie-Algebren einfach sind.
- (5) Die Killing-Form auf  $\mathfrak{g}$  ist nicht ausgeartet.

*Bemerkung 5.2.* Sind  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  Lie-Algebren, so trägt die direkte Summe  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$  eine natürliche Struktur einer Lie-Algebra. Die Lie-Klammer ist gegeben durch

$$[(a, b), (a', b')] = ([a, a'], [b, b'])$$

für  $a, a' \in \mathfrak{a}$  und  $b, b' \in \mathfrak{b}$ . Die natürlichen Inklusionen  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$  sind Ideale. Umgekehrt ist eine direkte Summe von Idealen einer Lie-Algebra auch eine direkte Summe von Lie-Algebren!

**Definition 5.3.** Eine komplexe endlich dimensionale Lie-Algebra, die die äquivalenten Bedingungen im Theorem 5.1 erfüllt, heißt *halbeinfach*.

*Bemerkung 5.4.* Jede einfache Lie-Algebra ist natürlich halbeinfach. Übrigens besitzt  $\mathfrak{g} = 0$  kein von Null verschiedenes Ideal, ist also halbeinfach!

**Definition 5.5.** Eine endlich dimensionale komplexe Lie-Algebra heißt *reduktiv*, falls ihre adjungierte Darstellung die direkte Summe von einfachen Darstellungen ist.

Mit Hilfe der obigen Charakterisierungen kann man ohne Probleme erkennen, daß jede halbeinfache Lie-Algebra reduktiv ist.

*Übung 5.6.*  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$  ist eine reductive Lie-Algebra.

*Beweis von Satz 5.1.* Natürlich folgt (1) aus (2). Wir zeigen umgekehrt, daß (2) aus (1) folgt. Sei  $I \subset \mathfrak{g}$  also ein auflösbares Ideal. Dann ist  $I^{(n)} = [I, I]$  ein Ideal von  $\mathfrak{g}$ . Ist  $I$  nun von Null verschieden, dann gibt es ein  $n \geq 0$ , so daß  $I^{(n)} \neq 0$ , aber  $I^{(n+1)} = 0$ , also ist  $I^{(n)}$  ein von Null verschiedenes abelsches Ideal, was unserer Voraussetzung (1) widerspricht. Also ist  $I = 0$  und (2) folgt aus (1).

Nun zeigen wir, daß (5) aus (2) folgt. Wir betrachten

$$\text{rad } \kappa = \mathfrak{g}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, \mathfrak{g}) = 0\}.$$

Wegen der Invarianz von  $\kappa$  ist  $\text{rad } \kappa \subset \mathfrak{g}$  ein Ideal. Außerdem ist  $\kappa|_{\text{rad } \kappa \times \text{rad } \kappa} = 0$ . Nun ist  $\kappa|_{\text{rad } \kappa \times \text{rad } \kappa}$  aber die Killing-Form auf der Lie-Algebra  $\text{rad } \kappa$ . Dies gilt ganz

allgemein für ein beliebiges Ideal, denn für  $x, y \in I$  ist  $\text{ad}(x)\text{ad}(y): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ein Endomorphismus mit  $\text{ad}(x)\text{ad}(y)(\mathfrak{g}) \subset I$ , damit

$$\text{Spur}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)) = \text{Spur}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)|_I) = \text{Spur}(\text{ad}(x)|_I \text{ad}(y)|_I).$$

Also ist die Killing-Form auf  $\text{rad } \kappa$  konstant Null. Nach Theorem 4.5 ist  $\text{rad } \kappa$  also auflösbar. Nach unserer Annahme (2) ist also  $\text{rad } \kappa = 0$ , also  $\kappa$  nicht ausgeartet.

Nun zeigen wir die Implikation (5)  $\implies$  (1). Ist  $I \subset \mathfrak{g}$  ein abelsches Ideal, so ist  $\text{ad}(y)\text{ad}(x)\text{ad}(y)(\mathfrak{g}) = 0$  für  $x \in \mathfrak{g}$  und  $y \in I$ , also  $(\text{ad}(x)\text{ad}(y))^2 = 0$ , also ist  $\kappa(x, y) = \text{Spur}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)) = 0$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $y \in I$ . Nach (5) ist  $I = 0$ .

Nun zeigen wir, daß (2)  $\implies$  (4). Mit jedem Ideal  $I$  von  $\mathfrak{g}$  ist auch  $I^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, I) = 0\}$  ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ , denn für  $z \in \mathfrak{g}$ ,  $x \in I^\perp$  und  $y \in I$  gilt

$$\kappa([x, z], y) = \kappa(x, [z, y]) = 0,$$

da  $x \in I^\perp$  und  $[z, y] \in I$ . Auf  $I \cap I^\perp$  verschwindet  $\kappa$  und wie zuvor erkennen wir, daß  $I \cap I^\perp$  auflösbar ist. Nach (2) ist also  $I \cap I^\perp = 0$  für jedes Ideal  $I$ . Natürlich ist  $\mathfrak{g} = I \oplus I^\perp$ . Außerdem gilt  $[I, I^\perp] \subset I \cap I^\perp = 0$  und wir erkennen, daß  $\mathfrak{g}$  die direkte Summe (als Lie-Algebra) der Lie-Algebren  $I$  und  $I^\perp$  ist. Es folgt, daß jedes Ideal von  $I$  oder  $I^\perp$  auch ein Ideal von  $\mathfrak{g}$  ist. Damit gibt es also keine von Null verschiedenen auflösbaren Ideale in  $I$  oder  $I^\perp$ . Per Induktion folgern wir daraus (4).

Nun folgt (3) aus (4), da eine direkte Summe von Idealen auch eine direkte Summe von Lie-Algebren ist (siehe Bemerkung 5.2).

Bleibt noch (3)  $\implies$  (2) zu zeigen. Ist  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$  die direkte Summe einfacher Lie-Algebren und ist  $I \subset \mathfrak{g}$  ein Ideal, so ist auch  $\pi_i(I) \subset \mathfrak{g}_i$  ein Ideal, wobei  $\pi_i: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_i$  die Projektion entlang obiger Zerlegung ist. Da  $\mathfrak{g}_i$  einfach ist, können nur die Fälle  $\pi_i(I) = 0$  oder  $\pi_i(I) = \mathfrak{g}_i$  vorkommen. Ist nun  $I$  auflösbar, so ist auch  $\pi_i(I)$  auflösbar für alle  $i$ , also  $\pi_i(I) = 0$  für alle  $i$ . Also ist  $I = 0$ .  $\square$

*Übung 5.7.* Ist  $\mathfrak{g}$  halbeinfach, so gilt  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

*Übung 5.8.* Jedes Ideal einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist halbeinfach. Jeder Quotient einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist halbeinfach. Ist jede Unter-Lie-Algebra einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra halbeinfach?

*Übung 5.9.* Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale komplexe reductive Lie-Algebra. So ist

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}$$

als Lie-Algebra. (Hier ist

$$\mathfrak{z} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{g}] = 0\}$$

das Zentrum von  $\mathfrak{g}$  (der Kern der Abbildung  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ .)

## 6. H                      D                      S                      W

**6.1. Das Lemma von Schur.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$

**Lemma 6.1.** [Lemma von Schur] Sei  $V$  eine endlich dimensionale einfache Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Dann ist jeder Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  von Darstellungen gegeben durch Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda$ , also  $f(v) = \lambda v$  für alle  $v \in V$ .

*Beweis.* Da  $V$  einfach ist, ist  $V \neq 0$ . Da  $k$  algebraisch abgeschlossen ist, gibt es zumindest einen Eigenwert  $\lambda \in k$  ein von  $f$ . Sei  $V_\lambda$  der entsprechende Eigenraum. Dann ist  $V_\lambda \subset V$  eine Unterdarstellung von  $V$ , also  $V_\lambda = V$ .  $\square$

**6.2. Halbeinfache Darstellungen.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über einem Körper  $k$ .

**Lemma 6.2.** *Sind  $U_1, \dots, U_n$  Darstellungen von  $\mathfrak{g}$ , so gibt es auf der direkten Summe  $U := U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  genau eine Struktur einer Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , so daß die Projektionen  $\pi: U \rightarrow U_i$  entlang obiger Zerlegung Homomorphismen von Darstellungen sind.*

*Beweis.* Übung.  $\square$

**Definition 6.3.** Eine Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  heißt *halbeinfach*, falls  $V$  isomorph zu einer direkten Summe von einfachen Darstellungen ist.

**Theorem 6.4.** *Für eine Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  sind gleichbedeutend:*

- (1)  $V$  ist halbeinfach.
- (2)  $V$  ist die Summe einfacher Unterdarstellungen.
- (3) Jede Unterdarstellung  $U \subset V$  besitzt ein Komplement, d.h. es existiert eine Unterdarstellung  $U' \subset V$  mit  $V = U \oplus U'$ .

*Beweis.* (1)  $\implies$  (2) ist trivial. Wir zeigen, daß (3) aus (2) folgt. Sei dazu  $U \subset V$  eine Unterdarstellung. Sei  $U' \subset U$  eine maximale Unterdarstellung mit der Eigenschaft  $U \cap U' = 0$ . Ist  $U \oplus U' \neq V$ , so gibt es nach (2) eine einfache Unterdarstellung  $L$  von  $V$ , die nicht in  $U \oplus U'$  enthalten ist. Aus der Einfachheit von  $L$  folgt  $L \cap U \oplus U' = 0$ , also ist die Summe von  $U$ ,  $U'$  und  $L$  direkt im Widerspruch zur Maximalität von  $U'$ .

Wir zeigen (3)  $\implies$  (1). Sei also  $V$  eine endlich dimensionale Darstellung, für die (3) gilt. Ist  $V = 0$ , so ist nichts zu zeigen. Ansonsten enthält  $V$  eine einfache Darstellung  $L \subset V$ . Sei  $L'$  eines ihrer Komplemente. Nun gilt (3) auch, wenn man in der Aussage  $V$  durch  $L'$  ersetzt. Denn ist  $U \subset L'$  eine Unterdarstellung und ist  $U'$  ein Komplement in  $V$ , so ist das Bild von  $U'$  unter der Projektion von  $V$  nach  $L'$  entlang  $L$  ein Komplement von  $U$  in  $L'$ . Per Induktion über die Dimension einer Darstellung folgt, daß  $L'$  halbeinfach ist. Also ist  $V$  halbeinfach.  $\square$

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist der Satz von Weyl, für dessen Beweis wir einige Vorbereitungen brauchen. Hier ist zunächst einmal die Aussage:

**6.3. Der Satz von Weyl.**

**Theorem 6.5** (Satz von Weyl). *Jede endlich dimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist halbeinfach.*

**6.4. Der Casimir-Operator.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra. Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$ . Nach den äquivalenten Charakterisierungen von Halbeinfachheit in Satz 5.1 ist die Killing-Form  $\kappa$  auf  $\mathfrak{g}$  nicht ausgeartet. Wir können also die *duale* Basis  $x_1^*, \dots, x_n^*$  charakterisieren durch die Vorschrift

$$\kappa(x_i, x_j^*) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun sei  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Wir definieren eine lineare Abbildung  $C: V \rightarrow V$  durch die Vorschrift

$$C(v) = \sum x_i x_i^*(v)$$

für  $v \in V$ .

*Übung 6.6.* Man zeige, daß die Abbildung  $C$  nicht von der Wahl der Basis  $x_1, \dots, x_n$  abhängt.

**Lemma 6.7.**  $C$  ist ein Homomorphismus von Darstellungen.

*Bemerkung 6.8.* Man nennt  $C$  den Casimir-Operator.

*Beweis.* Sei  $y \in \mathfrak{g}$  und seien  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} [x_i, y] &= \sum a_{ij} x_j, \\ [y, x_i^*] &= \sum b_{ij} x_j^*. \end{aligned}$$

Nun ist

$$a_{ij} = \kappa([x_i, y], x_j^*) = \kappa(x_i, [y, x_j^*]) = b_{ji}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} C(yv) &= \sum_i x_i x_i^* yv \\ &= \sum_i x_i [x_i^*, y]v + \sum_i x_i y x_i^* v \\ &= \sum_{i,j} -b_{ij} x_i x_j^* v + \sum_i [x_i, y] x_i^* v + \sum_i y x_i x_i^* v \\ &= \sum_{i,j} -b_{ij} x_i x_j^* v + \sum_{i,j} a_{ij} x_j x_i^* v + yC(v) \\ &= yC(v). \end{aligned}$$

□

*Übung 6.9.* Man zeige, daß für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  der Homomorphismus  $C$  gegeben ist durch die Operation von

$$\frac{1}{4}ef + \frac{1}{4}fe + \frac{1}{8}h^2.$$

Auf der endlich dimensionalen Darstellung  $L(n)$  muß  $C$  durch einen Skalar operieren nach dem Lemma von Schur. Man berechne diesen Skalar.

*Übung 6.10.* Sei  $\mathfrak{g}$  eine (halb)einfache Lie-Algebra. Dann operiert der Casimir-Operator als die Identität auf der adjungierten Darstellung. (Anmerkung: Man berechne die Spur des Casimir-Operators.)

**6.5. Homomorphismen zwischen Darstellungen.** Sind  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $k$ , so notieren wir  $\text{Hom}_k(V, W)$  für den Raum der  $k$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$ . Ist  $\mathfrak{g}$  eine  $k$ -Lie-Algebra und sind  $V$  und  $W$  Darstellungen von  $\mathfrak{g}$ , so trägt  $\text{Hom}_k(V, W)$  eine natürliche Struktur als Darstellung von  $\mathfrak{g}$  mittels

$$(x.f)(v) = x.(f(v)) - f(x.v)$$

für  $x \in \mathfrak{g}, v \in V, f \in \text{Hom}_k(V, W)$ .

Für eine Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  definieren wir

$$\begin{aligned} V^{\mathfrak{g}} &:= \{v \in V \mid x.v = 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{g}\}, \\ \mathfrak{g}V &:= \{x.v \mid x \in \mathfrak{g}, v \in V\}. \end{aligned}$$

Dies sind offenbar Unterdarstellungen von  $V$ .

Wir schreiben  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$  für den Raum der Homomorphismen von Darstellungen von  $V$  nach  $W$ . Offensichtlich ist

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \text{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}.$$

**Lemma 6.11.** *Sei  $V$  eine endlich dimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann ist*

$$V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V.$$

*Beweis.* Wir können annehmen, daß  $V$  unzerlegbar ist. Ist  $V = V^{\mathfrak{g}}$ , so ist  $\mathfrak{g}V = 0$  und unsere Behauptung folgt. Sei deshalb  $V \neq V^{\mathfrak{g}}$ . Die Darstellung sei durch den Homomorphismus  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V)$  gegeben. Dann ist  $\rho(\mathfrak{g}) \subset \text{gl}(V)$  eine halbeinfache Unter-Lie-Algebra und  $\rho(\mathfrak{g}) \neq 0$ .

Nun betrachten wir die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} \kappa': \rho(\mathfrak{g}) \times \rho(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \text{Spur}(x \circ y) \end{aligned}$$

(wir betrachten hier  $x$  und  $y$  als Endomorphismen von  $V$ ). Wie im Fall der Killing-Form zeigen wir, daß  $\kappa'$  eine invariante, symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform ist (ihr Radikal wäre auflösbar nach dem Cartan-Kriterium, da  $\rho(\mathfrak{g})$  halbeinfach ist, ist das Radikal also Null).

Nun wählen wir wie zuvor eine Basis  $\{x_i\}$  von  $\rho(\mathfrak{g})$  und bilden die duale Basis  $\{x_i^*\}$  bzgl.  $\kappa'$ . Dies liefert uns eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} C': V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \sum x_i x_i^*(v), \end{aligned}$$

und wie zuvor erkennen wir, daß  $C'$  ein Homomorphismus von Darstellungen von  $\mathfrak{g}$  ist. Es ist aber

$$\text{Spur } C = \sum_i \text{Spur } x_i x_i^* = \sum_i 1 = \dim_{\mathbb{C}} \rho(\mathfrak{g}).$$

Nun betrachten wir die Eigenwerte von  $C$  auf  $V$ . Jeder Hauptraum ist eine Unterdarstellung von  $\mathfrak{g}$ , da  $C$  ein Endomorphismus von Darstellungen ist. Wegen der Unzerlegbarkeit von  $V$  gibt es also nur einen Eigenwert. Wegen  $\text{Spur } C = \dim_{\mathbb{C}} \rho(\mathfrak{g})$  kann dieser Eigenwert nicht Null sein. Also ist  $C$  ein Isomorphismus auf  $V$ , also  $CV = V$ , also  $V = \mathfrak{g}V$  und  $V^{\mathfrak{g}} = 0$ .  $\square$

Wir beweisen nun den Satz von Weyl.

*Beweis des Satzes von Weyl.* Sei  $V$  eine endlich-dimensionale Darstellung der halbeinfachen komplexen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Nach Satz 6.4 reicht es zu zeigen, daß jede Unterdarstellung  $U$  von  $V$  ein Komplement besitzt. Wir wählen also eine solche Unterdarstellung  $U$  und betrachten die Restriktionsabbildung

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, U).$$

Dies ist ein Homomorphismus von Darstellungen. Wir können diese Darstellungen nun nach Lemma 6.11 zerlegen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U)^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, U) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, U)^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, U).\end{aligned}$$

Die Restriktionsabbildung ist kompatibel mit diesen Zerlegungen, da sie ein Homomorphismus von Darstellungen ist. Wir erhalten insbesondere eine surjektive Abbildung

$$\mathrm{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathrm{Hom}(U, U)^{\mathfrak{g}}.$$

Nun ist  $\mathrm{id}_U \in \mathrm{Hom}(U, U)^{\mathfrak{g}}$ . Sei  $f \in \mathrm{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}}$  ein Urbild von  $\mathrm{id}_U$ . So ist offenbar  $V = U \oplus \ker f$  eine direkte Summe von Darstellungen, was zu beweisen war.  $\square$

## 7. D J

In Satz 4.7 haben wir die Jordanzerlegung  $x = x_s + x_n$  eines Endomorphismus  $x$  eines endlich dimensionalen Vektorraums  $V$  eingeführt. Im folgenden wollen wir eine solche Zerlegung für jedes Element einer halbeinfachen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  definieren. Um Verwechslungen zu vermeiden, nennt man die Jordanzerlegung eines Endomorphismus nach Satz 4.7 die *konkrete Jordanzerlegung*, und die Zerlegung eines Elements einer halbeinfachen Lie-Algebra die *abstrakte Jordanzerlegung*. Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist folgendes:

**Theorem 7.1.** *Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra.*

- (1) *Für jedes  $x \in \mathfrak{g}$  gibt es eindeutig bestimmte Elemente  $s, n \in \mathfrak{g}$  mit den Eigenschaften:*
  - (a)  $x = s + n$ ,
  - (b)  $[s, n] = 0$ ,
  - (c)  $\mathrm{ad}(s): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ist diagonalisierbar und  $\mathrm{ad}(n): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ist nilpotent.
- (2) *Ist  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  ein Homomorphismus von halbeinfachen komplexen Lie-Algebren und ist  $x = s + n$  die Zerlegung aus (1), so ist  $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$  die entsprechende Zerlegung von  $\phi(x)$  in  $\mathfrak{g}'$ .*
- (3) *Ist  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum und  $\mathfrak{g} \subset \mathrm{gl}(V)$  eine halbeinfache komplexe Unter-Lie-Algebra, so stimmen die abstrakte Jordanzerlegung in  $\mathfrak{g}$  und die konkrete Jordanzerlegung in  $\mathrm{gl}(V)$  für jedes Element aus  $\mathfrak{g}$  überein.*

*Beweis.* Wir beginnen mit der Aussage zur Eindeutigkeit in (1). Der Kern von  $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$  ist ein abelsches Ideal, also Null nach der Charakterisierung halbeinfacher Lie-Algebren in Satz 5.1, und damit ist  $\mathrm{ad}$  injektiv. Sind nun  $x = s+n = s'+n'$  zwei Zerlegungen wie in (1), so folgt  $\mathrm{ad}(s) = \mathrm{ad}(s')$  und  $\mathrm{ad}(n) = \mathrm{ad}(n')$ , also  $s = s'$  und  $n = n'$ .

Wir zeigen nun die Existenz der Zerlegung in (1). Dazu benutzen wir folgendes Lemma:

**Lemma 7.2.** *Sei  $V$  ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum und  $\mathfrak{g}' \subset \mathrm{gl}(V)$  eine halbeinfache Unter-Lie-Algebra. Ist  $x \in \mathfrak{g}'$  und ist  $x = x_s + x_n$  die konkrete Jordanzerlegung in  $\mathrm{gl}(V)$ , so ist  $x_s \in \mathfrak{g}'$  und  $x_n \in \mathfrak{g}'$ .*

*Beweis.* Sei  $X \subset \mathrm{gl}(V)$  Unterraum aller Endomorphismen  $y$  mit den Eigenschaften:

- (1)  $[y, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}'$ ,

- (2) Ist  $W \subset V$  stabil unter der Operation von  $g'$ , so auch unter der Operation von  $y$  und es gilt  $\text{Spur } y|_W = 0$ .

Nun gilt  $g' \subset X$  (die Eigenschaft über die Spur in (2) folgt aus  $g' = [g', g']$ ). Nach (1) ist  $X$  eine Unter-Lie-Algebra von  $\mathfrak{gl}(V)$  und  $g' \subset X$  ist ein Ideal. Sei nun  $g^\perp \subset X$  der Orthogonalraum von  $g'$  unter der Killing-Form auf  $X$ . Dann ist, wegen der Invarianz der Killing-Form,  $g^\perp$  ein Ideal von  $X$ . Da  $g' \subset X$  ein Ideal ist, ist die Einschränkung der Killing-Form von  $X$  auf  $g'$  die Killing-Form auf  $g'$ . Wegen der Halbeinfachheit von  $g'$  ist die Killing-Form nicht ausgeartet auf  $g'$  und wir folgern

$$g' \cap g^\perp = \{0\}.$$

Dimensionsvergleich zeigt  $X = g' \oplus g^\perp$ .

Wir behaupten nun  $g^\perp = 0$ , also  $X = g'$ . Zum Beweis wählen wir  $y \in g^\perp$ . Sei  $W \subset V$  stabil unter  $g'$ . Nach Voraussetzung operiert  $y$  auf  $W$  mit Spur Null. Wegen  $[y, g'] = 0$  (da  $g^\perp \subset X$  ein Ideal ist), operiert  $y$  sogar durch einen  $g'$ -Endomorphismus auf  $W$ . Ist  $W$  eine einfache Darstellung von  $g'$ , so operiert  $y$  nach dem Lemma von Schur durch einen Skalar, der aber Null sein muss nach der Bedingung an die Spur. Nun zerfällt  $V$  nach dem Satz von Weyl in die direkte Summe einfacher Darstellungen von  $g'$ . Also ist  $y = 0$  und damit  $X = g'$ .

Sei nun  $x \in g' = X$  und  $x = x_s + x_n$  die konkrete Jordanzerlegung in  $\mathfrak{gl}(V)$ . Wir wollen zeigen, dass auch  $x_s$  ein Element in  $X$  ist, also die Eigenschaften (1) und (2) obiger Definition hat. Nach (1) stabilisiert  $\text{ad}(x)$  den Teilraum  $g'$  von  $\mathfrak{gl}(V)$ . Nach Lemma 4.9 ist  $\text{ad}(x) = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$  die Jordanzerlegung in  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$  und nach Lemma 4.8 gilt  $\text{im } \text{ad}(x_s) \subset \text{im } \text{ad}(x)$ . Also folgern wir  $\text{ad}(x_s)(g') \subset g'$ . Aus Lemma 4.8 folgt auch, daß jeder  $x$ -stabile Teilraum  $W \subset V$  stabil unter  $x_s$  ist. Da die Spur von  $x$  auf  $W$  mit der Spur von  $x_s$  auf  $W$  übereinstimmt, ist letztere also Null. Also gilt  $x_s \in X$  und damit auch  $x_n \in X$ . Wegen  $X = g'$  gilt also  $x_s, x_n \in g'$ , was zu zeigen war.  $\square$

Nun setzen wir den Beweis von Satz 7.1 fort und zeigen insbesondere die Existenz der abstrakten Jordanzerlegung. Sei also  $x \in \mathfrak{g}$ . Nun ist  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  eine halbeinfache Unter-Lie-Algebra. Nach obigem Lemma ist also  $\text{ad}(x)_s, \text{ad}(x)_n \in \text{ad}(\mathfrak{g})$ . Nun können wir also Urbilder  $s$  und  $n$  aus  $\mathfrak{g}$  von  $\text{ad}(x)_s$  und  $\text{ad}(x)_n$  wählen. Die Bedingungen an  $s$  und  $n$  folgen nun aus den analogen Eigenschaften der konkreten Jordanzerlegung mittels der Injektivität von  $\text{ad}$ . Damit haben wir Teil (1) von Satz 7.1 gezeigt.

Sei nun  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung und  $x = s + n$  die Zerlegung nach (1) von  $x \in \mathfrak{g}$ . Wir behaupten, daß  $\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$  die konkrete Jordanzerlegung von  $\rho(x)$  in  $\mathfrak{gl}(V)$  ist. Da  $\rho$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist gilt  $\rho \circ \text{ad}(x) = \text{ad}(\rho(x))$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$ , d.h. daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho} & \rho(\mathfrak{g}) \\ \text{ad}(x) \downarrow & & \downarrow \text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)) \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho} & \rho(\mathfrak{g}). \end{array}$$

Es bleibt kommutativ, wenn wir für die beiden vertikalen Abbildungen den halbeinfachen Teil im Sinne der konkreten Jordanzerlegung nehmen:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho} & \rho(\mathfrak{g}) \\
\text{ad}(x)_s \downarrow & & \downarrow \text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x))_s \\
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho} & \rho(\mathfrak{g}).
\end{array}$$

Nach Definition der abstrakten Jordanzerlegung ist die linke vertikale Abbildung aber  $\text{ad}(s)$ . Außerdem kommutiert das erste Diagramm auch, wenn wir  $x$  durch  $s$  ersetzen. Da  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \rho(\mathfrak{g})$  surjektiv ist, erhalten wir

$$\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(s)) = (\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\rho(x))_s.$$

Außerdem gilt  $(\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)))_s = \text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)_s)$  und wir erhalten

$$\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(s)) = \text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)_s).$$

Da  $\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}: \rho(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\rho(\mathfrak{g}))$  injektiv ist, folgt  $\rho(s) = \rho(x)_s$ . Damit haben wir insbesondere (3) gezeigt.

Ist nun  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  ein Homomorphismus von halbeinfachen Lie-Algebren, so ist  $\text{ad} \circ \phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$  eine Darstellung. Sei  $x \in \mathfrak{g}$  und  $x = s + n$  seine abstrakte Jordanzerlegung. Nach dem eben Bewiesenen ist  $\text{ad}(\phi(x)) = \text{ad}(\phi(s)) + \text{ad}(\phi(n))$  die konkrete Jordanzerlegung in  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$ , also ist  $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$  die konkrete Jordanzerlegung in  $\mathfrak{g}'$ . Damit haben wir (2) gezeigt.  $\square$

## 8. D W

**Definition 8.1.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra. Eine Unter-Lie-Algebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  heißt *Cartansche Unteralgebra*, falls sie maximal (bzgl. der Inklusion) unter allen Unter-Lie-Algebren  $\mathfrak{h}'$  ist, für die gilt:  $\mathfrak{h}'$  ist abelsch und besteht aus halbeinfachen Elementen von  $\mathfrak{g}$ .

Ist  $V$  ein komplexer Vektorraum und  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$  sein Dualraum, so schreiben wir im folgenden  $\langle \lambda, v \rangle = \lambda(v)$  für die natürliche Paarung  $V^* \times V \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definition 8.2.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartansche Unteralgebra. Für  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  definieren wir den simultanen Eigenraum der adjungierten Operation von  $\mathfrak{h}$  zum Eigenwert  $\alpha$  als

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{h} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ein  $\alpha \neq 0$  mit  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  nennen wir eine *Wurzel von  $\mathfrak{g}$  bzgl.  $\mathfrak{h}$* . Die Menge aller Wurzeln

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

heißt das *Wurzelsystem* von  $\mathfrak{g}$  bzgl.  $\mathfrak{h}$ .

Ersetzen wir in obiger Konstruktion die adjungierte Darstellung durch eine beliebige, endlich dimensionale Darstellung, so erhalten wir folgende Verallgemeinerung: Ist  $V$  eine endlich dimensionale Darstellung von  $\mathfrak{g}$  und ist  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartansche Unteralgebra, so operiert  $\mathfrak{h}$  auf  $V$  durch diagonalisierbare Endomorphismen nach Satz 7.1. Je zwei dieser Endomorphismen kommutieren, wir erhalten also eine simultane Eigenraumzerlegung

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda,$$

wobei

$$V_\lambda = \{v \in V \mid h.v = \lambda(h)v \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

**Definition 8.3.** Ein  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit  $V_\lambda \neq 0$  heißt *Gewicht* von  $V$  und  $V_\lambda$  heißt dann *Gewichtsraum* zum Gewicht  $\lambda$ .

**Lemma 8.4.** *Es gilt  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ .*

*Beweis.* Nach Definition einer Cartanschen Unteralgebra ist jedes  $\text{ad}(h)$  mit  $h \in \mathfrak{h}$  ein diagonalisierbarer Operator auf  $\mathfrak{g}$ , und  $\text{ad}(h)$  und  $\text{ad}(h')$  kommutieren für  $h, h' \in \mathfrak{h}$ . Nun ist eine beliebige Menge von kommutierenden diagonalisierbaren linearen Abbildungen simultan diagonalisierbar. Dies liefert die Aussage des Lemmas.  $\square$

**Lemma 8.5.** (1) *Für  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$  gilt*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

(2) *Ist  $\alpha \neq -\beta$ , so ist*

$$\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0.$$

(3) *Die Bilinearform*

$$\kappa|_{\mathfrak{g}_0}: \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathbb{C}$$

*ist nicht-ausgeartet. Ebenso ist  $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}} \cong \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow \mathbb{C}$  nicht ausgeartet für  $\alpha \in R$ .*

*Beweis.* Teil (1) folgt direkt aus der Definition der Wurzelräume und der Jacobi-Identität. Ist  $\alpha + \beta \neq 0$  und  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$ , so ist  $\text{ad}(x)\text{ad}(y)$  nilpotent nach (1), also  $\kappa(x, y) = \text{Spur}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)) = 0$ , also (2). Wäre nun die Einschränkung von  $\kappa$  auf  $\mathfrak{g}_0$  ausgeartet, so wäre  $\kappa$  ausgeartet nach Teil (2) und dem Lemma 8.4, im Widerspruch zur Halbeinfachheit von  $\mathfrak{g}$  und Satz 4.8. Ebenso folgt die zweite Aussage von Teil (3).  $\square$

**Satz 8.6.** *Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartansche Unteralgebra. So ist  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ .*

*Beweis.* Es ist  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ , da  $\mathfrak{h}$  abelsch ist. Sei  $x \in \mathfrak{g}_0$ . Dann ist also  $\text{ad}(x)(\mathfrak{h}) = 0$ . Sei  $x = s + n$  die abstrakte Jordanzerlegung von  $x$  in  $\mathfrak{g}$ . Dann ist  $\text{ad}(x) = \text{ad}(s) + \text{ad}(n)$  die konkrete Jordanzerlegung und nach Lemma 4.8 ist  $\text{ad}(s)(\mathfrak{h}) \subset \text{ad}(x)(\mathfrak{h}) = 0$  und damit auch  $\text{ad}(n)(\mathfrak{h}) = 0$ . Damit liegen  $s$  und  $n$  in  $\mathfrak{g}_0$ . Nun ist  $\mathfrak{h} + \mathbb{C}s$  eine abelsche Unter-Lie-Algebra von  $\mathfrak{g}$  und besteht aus halbeinfachen Elementen, da die Summe von kommutierenden halbeinfachen Elementen wieder halbeinfach ist. Wegen der Maximalität von  $\mathfrak{h}$  ist also  $s \in \mathfrak{h}$ .

Nun ist  $\text{ad}(x) = \text{ad}(n): \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$ , da ja  $\text{ad}(s)(\mathfrak{g}_0) = 0$  wegen  $s \in \mathfrak{h}$ . Also ist jedes Element in  $\mathfrak{g}_0$  ad-nilpotent, und nach dem Satz von Engel ist  $\mathfrak{g}_0$  eine nilpotente Lie-Algebra, insbesondere also auflösbar.

Nach Satz 3.13 finden wir eine Basis von  $\mathfrak{g}$ , bzgl. derer jeder Endomorphismus  $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  mit  $x \in \mathfrak{g}_0$  obere Dreiecksform hat. Nun ist  $\text{ad}(n)$  sogar nilpotent auf  $\mathfrak{g}$ , also wird  $\text{ad}(n)$  durch eine echte obere Dreiecksmatrix gegeben. Damit gilt

$$\kappa(n, \mathfrak{g}_0) = 0.$$

Nun ist  $n \in \mathfrak{g}_0$ . Aus Lemma 8.5 erhalten wir  $n = 0$ . Damit ist also  $x = s \in \mathfrak{h}$ .  $\square$

**Lemma 8.7.** Sei  $\alpha \in R$ . Dann gilt

- (1)  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  ist ein eindimensionaler Unterraum.
- (2) Die Einschränkung von  $\alpha$  auf  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  ist nicht Null.

*Beweis.* Sei  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  und  $h \in \mathfrak{h}$ . Wegen der Invarianz der Killing-Form ist

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \alpha(h)\kappa(x, y).$$

Ist nun  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]^\perp$  das orthogonale Komplement von  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  in  $\mathfrak{g}_0$  bzgl.  $\kappa$ , so gilt also  $\ker \alpha \subset [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]^\perp$ , also ist die Kodimension von  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]^\perp$  in  $\mathfrak{h}$  höchstens eins. Da  $\kappa$  auf  $\mathfrak{h}$  nicht ausgeartet ist (nach Lemma 8.5 und Satz 8.6), folgt  $\dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \leq 1$ . Nun ist aber auch  $\kappa: \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow \mathbb{C}$  nicht ausgeartet nach Lemma 8.5, es gibt also  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $\kappa(x, y) \neq 0$ . Wählen wir nun  $h \in \mathfrak{h}$  mit  $\alpha(h) \neq 0$ , so gilt nach obiger Formel

$$\kappa(h, [x, y]) \neq 0,$$

also insbesondere  $[x, y] \neq 0$ . Wir schliessen  $\dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ .

Wir müssen noch zeigen, daß  $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0$ . Dazu wählen wir  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $h := [x, y] \neq 0$ . Wäre nun  $\alpha(h) = 0$ , so würden  $h, x, y$  eine nilpotente, also auflösbare Lie-Algebra aufspannen. In einer geeigneten Basis von  $\mathfrak{g}$  wären  $\text{ad}(x), \text{ad}(y)$  und  $\text{ad}(h)$  also gegeben durch obere Dreiecksmatrizen. Wegen  $h = [x, y]$  wäre  $\text{ad}(h)$  sogar gegeben durch eine echte obere Dreiecksmatrix. Da  $\text{ad}(h)$  aber diagonalisierbar ist (nach Definition einer Cartanschen Unteralgebra), könnten wir  $\text{ad}(h) = 0$ , also  $h = 0$  (wegen der Halbeinfachheit von  $\mathfrak{g}$ ) folgern im Widerspruch zu unserer Annahme.  $\square$

**Definition 8.8.** Nach dem Lemma 8.7 gibt es für jede Wurzel  $\alpha$  ein eindeutig bestimmtes Element  $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$  mit den Eigenschaften

- (1)  $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ ,
- (2)  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ .

Wir nennen  $\alpha^\vee$  die *Kowurzel* zu  $\alpha$ .

**Satz 8.9.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartansche Unteralgebra. Sei  $\alpha \in R$ .

- (1) Es gibt einen Homomorphismus  $i_\alpha: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}$  von Lie-Algebren mit den Eigenschaften

$$\mathbb{C}e \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathbb{C}h \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}], \quad \mathbb{C}f \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Insbesondere sind die Wurzelräume  $\mathfrak{g}_\alpha$  eindimensional.

- (2) Es ist  $\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$ .

*Beweis.* Es gibt  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $\alpha^\vee = [x, y]$ . Dann spannen  $x, \alpha^\vee, y$  eine zu  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  isomorphe Unter-Lie-Algebra  $\mathfrak{g}^\alpha$  auf.

Unter der adjungierten Operation von  $\mathfrak{g}^\alpha$  ist  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale, also nach dem Satz von Weyl halbeinfache Darstellung. Darin ist

$$\mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t \in \mathbb{C}, t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$$

eine Unterdarstellung und wir finden eine Unterdarstellung  $V$  mit

$$\mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t \in \mathbb{C}, t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha} = V \oplus \mathfrak{g}^\alpha.$$

Der Gewichtsraum bzgl.  $\alpha^\vee$  zum Gewicht Null auf der linken Seite ist gerade  $\mathbb{C}\alpha^\vee$  und  $\mathbb{C}\alpha^\vee$  ist ganz in  $\mathfrak{g}^\alpha$  enthalten. Nach der Klassifikation der einfachen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  folgt aus  $V \neq 0$ , daß ein Gewichtsraum zum Gewicht 1 bzgl.  $\alpha^\vee$  in  $V$  enthalten sein muß. Wegen  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  muß  $\alpha/2$  ebenfalls eine Wurzel von  $\mathfrak{g}$  sein.

Nun wählen wir aber  $\alpha$  so, daß  $\alpha/2$  keine Wurzel ist (das ist immer möglich, da es ja nur endlich viele Wurzeln gibt). Dann ist, für dieses  $\alpha$ , obiges  $V$  der Nullraum und wir folgern (1) und (2) für solche  $\alpha$ . Insbesondere ist  $2\alpha$  keine Wurzel! Daraus folgern wir, daß für jede Wurzel  $\alpha$  das Element  $\alpha/2$  keine Wurzel ist, und wir haben (1) und (2) allgemein gezeigt.  $\square$

**Satz 8.10.** (1) Für  $\alpha, \beta \in R$  gilt  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$  und  $\beta - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha \in R$ .  
 (2) Die Menge  $R$  erzeugt den Vektorraum  $\mathfrak{h}^*$ .

*Beweis.* Aussage (1) stimmt sicherlich für  $\beta = \pm\alpha$ . Sei also nun  $\beta \neq \pm\alpha$ . So ist

$$X := \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+t\alpha}$$

eine  $\mathfrak{g}^\alpha$ -Unterdarstellung in  $\mathfrak{g}$ . Nun sind alle Gewichtsräume höchstens eindimensional nach Satz 8.9, und  $\alpha^\vee$  operiert auf  $\mathfrak{g}_{\beta+t\alpha}$  durch Multiplikation mit dem Skalar  $\langle \beta + t\alpha, \alpha^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle + 2t$ . Nach der Klassifikation der einfachen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  kommen nur ganzzahlige Gewichte vor, also ist  $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$  (man setze  $t = 0$  ein und beachte, daß  $\beta$  tatsächlich ein Gewicht ist). Außerdem kommt mit jedem Gewicht auch sein negatives vor. Mit dem Eigenraum  $\beta$  muß also auch  $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$  vorkommen, da

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -\langle \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha, \alpha^\vee \rangle.$$

Aussage (2) ist äquivalent zur Aussage, daß  $\bigcap_{\alpha \in R} \ker(\alpha) = 0$ . Ist aber  $h \in \mathfrak{h}$  im Schnitt enthalten, so operiert  $h$  durch Null auf  $\mathfrak{g}$ , ist also Null, da  $\mathfrak{g}$  halbeinfach ist.  $\square$

**Satz 8.11.** Sind  $\alpha, \beta$  und  $\alpha + \beta$  in  $R$ , so ist

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

*Beweis.* Unsere Voraussetzungen implizieren  $\beta \neq \pm\alpha$ . Wir betrachten wieder

$$X := \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+t\alpha}$$

als Darstellung von  $\mathfrak{g}^\alpha$ . Jeder Eigenraum von  $\alpha^\vee$  ist hier eindimensional, und wegen  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  hat jeder Eigenwert die gleiche Parität. Nach der Klassifikation der endlich-dimensionalen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  ist  $X$  also eine einfache Darstellung. Damit folgt die Aussage des Satzes aus der expliziten Beschreibung der Struktur der einfachen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  in Abschnitt 2.3.  $\square$

Sei  $k$  ein Körper der Charakteristik 0.

**9.1. Spiegelungen.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $k$ -Vektorraum. Ist  $s: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, so schreiben wir  $V^s$  für den Raum der  $s$ -Invarianten, also

$$V^s = \{v \in V \mid s(v) = v\}.$$

**Definition 9.1.** Eine lineare Abbildung  $s: V \rightarrow V$  heißt *Spiegelung*, falls  $s^2 = \text{id}_V$  und  $\dim V^s = \dim V - 1$ . Die Hyperebene  $V^s$  heißt dann *Spiegelebene* bzgl.  $s$ .

*Beispiel 9.2.* Sei  $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$  und  $v \in V$  ein Vektor mit  $\alpha(v) = 2$ . Dann ist die Abbildung  $s_{\alpha,v}: V \rightarrow V$ ,  $x \mapsto x - \langle \alpha, x \rangle v$  eine Spiegelung auf  $V$  mit Spiegelebene  $\{x \in V \mid \langle \alpha, x \rangle = 0\}$ .

## 9.2. Wurzelsysteme.

**Definition 9.3.** Eine Teilmenge  $R \subset V$  heißt *Wurzelsystem*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (1)  $R$  ist endlich, enthält nicht die Null und erzeugt  $V$ .
- (2) Für  $\alpha \in R$  gilt:  $1/2\alpha \notin R$ .
- (3) Zu jedem  $\alpha \in R$  existiert ein  $\alpha^\vee \in V^*$  mit  $\alpha^\vee(R) \subset \mathbb{Z}$  und  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ , und so daß die Spiegelung  $s_{\alpha,\alpha^\vee}: V \rightarrow V$ ,  $v \mapsto v - \langle \alpha^\vee, v \rangle \alpha$  die Menge  $R$  invariant läßt.

**Lemma 9.4.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan-sche Unteralgebra. Dann ist  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$  ein Wurzelsystem im Sinne der obigen Definition.

*Beweis.* Es ist klar, daß  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  endlich ist und nicht die Null enthält. Daß  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  den Vektorraum  $\mathfrak{h}^*$  erzeugt ist eine der Aussagen von Satz 8.10. Das Element  $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$  ist natürlich die Kowurzel zu  $\alpha$ , die wir in 8.8 definiert hatten. Satz 8.10 zeigt, daß  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  stabil ist unter der Spiegelung  $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ . Die restlichen Eigenschaften eines Wurzelsystems haben wir in den Sätzen 8.9 und 8.10 geprüft.  $\square$

Von nun an sei  $R \subset V$  ein Wurzelsystem. Sei  $V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}R$  der von  $R$  erzeugte  $\mathbb{Q}$ -Unterraum in  $V$ . Sei  $G \subset \text{GL}(V_{\mathbb{Q}})$  die Menge aller Automorphismen, die das Wurzelsystem  $R$  in sich überführen. Da  $R$  eine endliche,  $V_{\mathbb{Q}}$  erzeugende Menge ist, ist  $G$  eine endliche Gruppe. Nach der Definition eines Wurzelsystems enthält  $G$  alle Spiegelungen  $s_{\alpha,\alpha^\vee}$  für  $\alpha \in R$ .

**Lemma 9.5.** Es gibt auf  $V_{\mathbb{Q}}$  ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt, also eine Bilinearform  $(\cdot, \cdot): V_{\mathbb{Q}} \times V_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$  mit den Eigenschaften

- (1) Für alle  $v \in V_{\mathbb{Q}}$  ist  $(v, v) \geq 0$  und  $(v, v) = 0$  impliziert  $v = 0$  ( $(\cdot, \cdot)$  ist positiv definit).
- (2) Für alle  $v, w \in V_{\mathbb{Q}}$  gilt  $(v, w) = (w, v)$  ( $(\cdot, \cdot)$  ist symmetrisch).
- (3) Für alle  $g \in G$  und  $v, w \in V_{\mathbb{Q}}$  gilt  $(gv, gw) = (v, w)$  ( $(\cdot, \cdot)$  ist invariant).

*Beweis.* Sei  $(\cdot, \cdot)'$  irgendein Skalarprodukt auf  $V_{\mathbb{Q}}$ , also eine symmetrische und positiv-definite Bilinearform. Wir definieren

$$(v, w) := \sum_{g \in G} (gv, gw)'.$$

Dies ist offenbar eine positiv-definite und symmetrische und zusätzlich  $G$ -invariante Bilinearform.  $\square$  Von nun an fixieren wir eine solche Form  $(\cdot, \cdot)$ .

**Lemma 9.6.** Sei  $\alpha \in R$ . Dann gilt:

- (1) Das Element  $\alpha^\vee$  ist durch die Eigenschaft (2) in der Definition eines Wurzelsystems eindeutig bestimmt.
- (2) Ist  $\beta \in R$ , so gilt

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

*Beweis.* Wir betrachten die Spiegelung  $s = s_{\alpha, \alpha^\vee}$  und ihre Fixpunktmenge  $V^s$ . Sei  $v \in V^s$ . Dann gilt

$$(v, \alpha) = (s_{\alpha, \alpha^\vee}(v), \alpha) = (v, s_{\alpha, \alpha^\vee}(\alpha)) = -(v, \alpha),$$

also  $(v, \alpha) = 0$ . Wir erhalten

$$V^s = (k\alpha)^\perp,$$

da beide Räume von Kodimension 1 sind.

Dies definiert  $\alpha^\vee$  eindeutig als dasjenige Element in  $V_{\mathbb{Q}}^* \subset V^*$ , das die zu  $\alpha$  orthogonale Ebene beschreibt und die Eigenschaft  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  hat. Diese Eigenschaft hat aber auch die Linearform

$$v \mapsto 2 \frac{(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

und wir erhalten (2).  $\square$

Insbesondere hängt die Spiegelung  $s_{\alpha, \alpha^\vee}$  nur von  $\alpha$  ab, wir schreiben deshalb im Folgenden  $s_\alpha$  statt  $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ . Wir nennen  $\alpha^\vee$  die  $\alpha$  entsprechende *Kowurzel* und definieren

$$R^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}.$$

*Übung 9.7.*  $R^\vee \subset R$  ist ein Wurzelsystem und es gilt  $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$ .

**Lemma 9.8.** Für  $\alpha \in R$  gilt

$$k\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}.$$

*Beweis.* Wegen  $s_\alpha(R) \subset R$  und  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  ist  $\{\alpha, -\alpha\} \subset k\alpha$ . Ist nun  $\zeta\alpha \in R$  für ein  $\zeta \in k$ , so ist  $(\zeta\alpha)^\vee = \zeta^{-1}(\alpha^\vee)$  nach Lemma 9.6. Nach Definition eines Wurzelsystems ist

$$\langle (\zeta\alpha)^\vee, \alpha \rangle = 2\zeta^{-1} \in \mathbb{Z}$$

und

$$\langle \alpha^\vee, \zeta\alpha \rangle = 2\zeta \in \mathbb{Z}.$$

Daraus schliessen wir  $\zeta \in \{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}\}$ . Den Fall  $\zeta = \pm \frac{1}{2}$  schließt die Definition eines Wurzelsystems aus. Der Fall  $\zeta = \pm 2$  ist dann ebenfalls ausgeschlossen und wir erhalten  $\zeta = \pm 1$ , was zu beweisen war.  $\square$

### 9.3. Paare von Wurzeln.

**Lemma 9.9.** Seien  $\alpha, \beta \in R$  und  $\alpha \neq \pm\beta$ . Nachdem wir evtl.  $\alpha$  und  $\beta$  vertauscht haben, können wir  $|\langle \alpha, \beta^\vee \rangle| \leq |\langle \beta, \alpha^\vee \rangle|$  annehmen. Für das Paar  $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle, \langle \beta, \alpha^\vee \rangle)$  gibt es dann (höchstens) folgende Möglichkeiten:

$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$	0	1	-1	1	-1	1	-1
$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$	0	1	-1	2	-2	3	-3

*Beweis.* Es ist

$$0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} < 4.$$

Ist nun  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0$ , so ist  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = 0$  und damit auch  $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$ .

Ist eine der beiden Zahlen nicht Null, so haben  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$  oder  $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$  das gleiche Vorzeichen. Wir nehmen nun an, daß  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$ .

Nun ist  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$  eine ganze Zahl. Dann muß  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$  gleich 1 sein und  $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$  ist entweder 1, 2 oder 3.  $\square$

**Lemma 9.10.** Seien  $\alpha, \beta \in R$ ,  $\alpha \neq \pm\beta$ . Ist  $(\alpha, \beta) > 0$ , so ist  $\alpha - \beta$  eine Wurzel. Ist  $(\alpha, \beta) < 0$ , so ist  $\alpha + \beta$  eine Wurzel.

*Beweis.* Wir müssen nur die erste der beiden Aussagen beweisen, die zweite folgt aus der ersten indem wir  $\beta$  durch  $-\beta$  ersetzen. Aus  $(\alpha, \beta) > 0$  folgt  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$ . Ist  $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ , so ist  $s_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in R$ . Ist  $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 1$ , so ist  $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 1$  nach der Tabelle in Lemma 9.9, und damit  $\beta - \alpha \in R$ , also auch  $\alpha - \beta \in R$ .  $\square$

### 9.4. Basen, positive Wurzeln und Weylkammern.

**Definition 9.11.** Eine Teilmenge  $\Pi \subset R$  heißt *Basis* des Wurzelsystems, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $\Pi$  ist eine Basis von  $V$ ,
- (2) Ist  $\beta \in R$  und  $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ , so gilt entweder  $n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  für alle  $\alpha$  oder  $n_\alpha \in \mathbb{Z}_{< 0}$  für alle  $\alpha$ .

Elemente einer fest gewählten Basis nennen wir *einfache Wurzeln*.

**Lemma 9.12.** Sei  $\Pi \subset R$  eine Basis und  $\beta \in R \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ . Dann läßt sich  $\beta$  schreiben als Summe einfacher Wurzeln,  $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , derart, daß für alle  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_i$  eine Wurzel ist.

*Beweis.* Wir können  $\beta \notin \Pi$  annehmen. Da  $\Pi$  eine Basis von  $V$  ist und  $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$  muß es ein  $\alpha \in \Pi$  geben mit  $(\alpha, \beta) > 0$ . Dann ist  $\beta - \alpha$  nach 9.10 eine Wurzel. Wir setzen  $\alpha_n := \alpha$  und fahren fort (per Induktion) mit der Wurzel  $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ .  $\square$

**Lemma 9.13.** Sei  $\Pi \subset R$  eine Basis und seien  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Dann gilt  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .

*Beweis.* Im Fall  $(\alpha, \beta) > 0$  besagt Lemma 9.10, daß  $\alpha - \beta$  eine Wurzel ist, im Widerspruch zur Definition einer Basis.  $\square$

**Definition 9.14.** Eine Teilmenge  $R^+ \subset R$  heißt ein *System positiver Wurzeln*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es ist  $R^+ \cap -R^+ = \emptyset$  und  $R = R^+ \cup (-R^+)$ .  
(2) Sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^+$  und gilt  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R$ , so ist  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R^+$ .

Wir definieren

$$H_\alpha^+ := \{v \in V_{\mathbb{Q}} \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle > 0\}$$

und  $H_\alpha^- = -H_\alpha^+$ .

**Definition 9.15.** Die Zusammenhangskomponenten von  $V_{\mathbb{Q}} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$  heißen *Weylkammern*.

**Satz 9.16.** *Es gibt eine Bijektionen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Weylkammern} \\ \text{in } V_{\mathbb{Q}} \\ \text{bzgl. } R \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Systeme} \\ \text{positiver Wurzeln} \\ \text{in } R \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Basen} \\ \text{von } R \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Ist  $C \subset V_{\mathbb{Q}}$  eine Weylkammer, so definieren wir

$$R^+(C) := \{\beta \in R \mid (\beta, \gamma) > 0 \text{ für alle } \gamma \in C\},$$

$$\Pi(C) := \left\{ \alpha \in R^+(C) \mid \begin{array}{l} \alpha \text{ läßt sich nicht schreiben} \\ \text{als Summe von mindestens zwei} \\ \text{Elementen aus } R^+ \end{array} \right\}.$$

Wir zeigen nun, daß  $R^+(C)$  ein System positiver Wurzeln ist. In der Definition von  $R^+(C)$  genügt es offenbar, die Bedingung  $(\beta, \gamma) > 0$  für ein einziges  $\gamma \in C$  zu prüfen. Daraus erkennen wir, daß für jede Wurzel  $\beta \in R$  entweder  $\beta \in R^+(C)$  oder  $-\beta \in R^+(C)$  gilt. Die zweite Bedingung an ein System positiver Wurzeln ist ebenfalls leicht zu beweisen, damit ist also  $R^+(C)$  ein System positiver Wurzeln.

Nun zeigen wir, daß  $\Pi(C)$  eine Basis von  $R$  ist. Sind  $\alpha, \beta \in \Pi(C)$  und  $\alpha \neq \beta$ , so ist  $(\alpha, \beta) \leq 0$ , denn sonst wäre nach Lemma 9.10  $\alpha - \beta$  eine Wurzel, also  $\alpha - \beta \in R^+(C)$  oder  $\beta - \alpha \in R^+(C)$ . Im ersten Fall wäre  $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$  eine Summe von zwei Elementen in  $R^+(C)$ , im zweiten Fall gälte das für  $\beta$ . Beides steht im Widerspruch zu unseren Definitionen, also gilt  $(\alpha, \beta) \leq 0$  für alle  $\alpha, \beta \in \Pi(C)$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

Weiter ist  $\Pi(C)$  eine linear unabhängige Menge. Denn sind  $k_\alpha \in \mathbb{Q}$  gegeben für  $\alpha \in \Pi(C)$  mit  $\sum k_\alpha \alpha = 0$ , so können wir alle negativen  $k_\alpha$  auf die rechte Seite bringen und erhalten eine Gleichung

$$\sum a_\alpha \alpha = \sum b_\beta \beta$$

mit nicht negativen Koeffizienten  $a_\alpha$  und  $b_\beta$ . Außerdem sind die Mengen  $\{\alpha \mid a_\alpha \neq 0\}$  und  $\{\beta \mid b_\beta \neq 0\}$  disjunkt. Sei  $\epsilon := \sum a_\alpha \alpha$ . Dann ist (wegen  $(\alpha, \beta) \leq 0$  für  $\alpha \neq \beta$  und  $a_\alpha, b_\beta > 0$ )

$$(\epsilon, \epsilon) \leq 0,$$

also  $\epsilon = 0$ . Für ein  $\gamma \in C$  gilt nun  $(\gamma, \alpha) > 0$  für alle  $\alpha \in R^+(C)$ . Aus  $(\gamma, \epsilon) = 0$  folgt  $s_\alpha = 0$  für alle  $\alpha$ . Damit ist  $\Pi(C)$  also eine linear unabhängige Menge.

Nun ist jedes Element aus  $R^+(C)$  Summe von Elementen aus  $\Pi(C)$ . Dies zeigen wir durch Widerspruch. Wir fixieren  $\gamma \in C$  und wählen  $\beta \in R^+(C)$  so, daß  $\beta$  nicht die Summe von Elementen aus  $\Pi(C)$  ist und zudem  $(\gamma, \beta)$  minimal ist unter allen Zahlen  $(\gamma, \beta')$ , wobei  $\beta'$  nicht die Summe von Elementen aus  $\Pi$  ist. Dann ist ein solches  $\beta$  Summe von Elementen aus  $R^+(C)$ , die, wegen der Minimalität, selbst Summen von Elementen aus  $\Pi(C)$  sind. Also ist  $\beta$  doch die Summe von Elementen aus  $\Pi(C)$ .

Folglich ist  $\Pi(C)$  auch ein Erzeugendensystem von  $V_{\mathbb{Q}}$ . Das Axiom (2) einer Basis ist leicht zu prüfen. Also ist  $\Pi(C)$  eine Basis.

Sei nun  $\Pi \subset R$  eine Basis. Wir definieren

$$R^+(\Pi) := \{\alpha \in R \mid \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi\}.$$

Es ist offensichtlich, daß  $R^+(\Pi)$  ein System positiver Wurzeln ist.

Nun betrachten wir die Menge

$$C(\Pi) := \{\gamma \in V_{\mathbb{Q}} \mid (\gamma, \alpha) > 0 \text{ für alle } \alpha \in \Pi\}.$$

$C(\Pi)$  ist nicht leer, enthält beispielsweise das Element  $\sum \alpha^*$ , wobei  $\{\alpha^*\}$  die bzgl.  $(\cdot, \cdot)$  duale Basis von  $\Pi$  ist. Weil  $R^+(\Pi)$  ein System positiver Wurzeln ist, ist  $C(\Pi) \subset V_{\mathbb{Q}} \setminus \bigcup_{\beta \in \alpha} H_{\alpha}$ . Da  $C(\Pi)$  zusammenhängend ist, ist  $C(\Pi)$  also eine Weylkammer. Man erkennt ohne Probleme, daß die Abbildungen  $\Pi \mapsto C(\Pi)$  und  $C \mapsto \Pi(C)$  zueinander invers sind.

**Lemma 9.17.** Für  $\alpha \in \Pi$  gilt  $s_{\alpha}(R^+(\Pi) \setminus \{\alpha\}) = R^+(\Pi) \setminus \{\alpha\}$

*Beweis.* Sei  $\beta \in R^+(\Pi) \setminus \{\alpha\}$ . Schreiben wir  $\beta$  als Summe einfacher Wurzeln, so gibt es mindestens einen Summanden  $\alpha'$  mit  $\alpha' \neq \alpha$ . Nun ist  $s_{\alpha}(\beta) = \beta - k\alpha$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Schreiben wir  $s_{\alpha}(\beta)$  als Linearkombination einfacher Wurzeln, so kommt  $\alpha'$  also mit positivem Koeffizienten vor. Nach Definition einer Basis ist  $s_{\alpha}(\beta) \in R^+(\Pi)$ , und natürlich ist  $s_{\alpha}(\beta) \neq \alpha$ , was zu zeigen war.  $\square$

Sei nun  $R^+ \subset R$  ein System positiver Wurzeln. Wir wählen eine Basis  $\Pi$  von  $R$ , so daß die Menge  $R^+(\Pi) \cap R^+$  maximal ist. Ist  $R^+(\Pi) \neq R^+$ , so gibt es ein  $\alpha \in \Pi$  mit  $\alpha \notin R^+$ . Dann ist aber

$$\begin{aligned} R^+ \cap R^+(s_{\alpha}(\Pi)) &= R^+ \cap s_{\alpha}(R^+(\Pi)) \\ &= R^+ \cap (R^+(\Pi) \setminus \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}) \end{aligned}$$

größer als  $R^+ \cap R^+(\Pi)$ , was unserer Wahl von  $\Pi$  widerspricht. Also ist  $R^+(\Pi) = R^+$  und die Abbildungen  $\Pi \mapsto R^+(\Pi)$ ,  $R^+ \mapsto \Pi(R^+)$  sind zueinander inverse Abbildungen.  $\square$

## 9.5. Die Weylgruppe.

**Definition 9.18.** Die von den Spiegelungen  $s_{\alpha}$  für  $\alpha \in R$  erzeugte Untergruppe  $\mathcal{W} \subset GL(V)$  heißt die *Weylgruppe* von  $R$ .

Da  $\mathcal{W}$  das Wurzelsystem in sich überführt, gilt  $\mathcal{W} \subset G$ . Insbesondere ist  $\mathcal{W}$  endlich und unsere Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$  ist  $\mathcal{W}$ -invariant.

**Satz 9.19.** Sei  $\Pi \subset R$  eine Basis.

- (1) Die Spiegelungen  $s_{\alpha}$  mit  $\alpha \in \Pi$  erzeugen die Weylgruppe  $\mathcal{W}$ .
- (2) Die Weylgruppe operiert einfach transitiv auf der Menge der Basen von  $R$ , d.h. jede Basis  $\Pi'$  von  $R$  ist von der Form  $\Pi' = w(\Pi)$  für ein eindeutig bestimmtes Element  $w \in \mathcal{W}$ .

**Definition 9.20.** Sei  $C$  eine Weylkammer. Eine Spiegelebene  $H_{\alpha}$  heißt *Wand* von  $C$ , falls die Menge  $\overline{C} \cap H_{\alpha}$  die Ebene  $H_{\alpha}$  erzeugt.

Sei  $R^+$  das zu  $\Pi$  gehörende System positiver Wurzeln und  $C$  die entsprechende Weylkammer. Wir definieren

$$\rho := 1/2 \sum_{\alpha \in R^+} \alpha.$$

**Lemma 9.21.** Für  $\alpha \in \Pi$  gilt  $s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = R^+ \setminus \{\alpha\}$  und  $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ .

*Beweis.* Sei  $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$ . Schreiben wir  $\beta$  als Summe einfacher Wurzeln, so gibt es mindestens einen Summanden  $\alpha'$  mit  $\alpha' \neq \alpha$ . Nun ist  $s_\alpha(\beta) = \beta - k\alpha$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Schreiben wir  $s_\alpha(\beta)$  als Linearkombination einfacher Wurzeln, so kommt  $\alpha'$  also mit positivem Koeffizienten vor. Nach Definition einer Basis ist  $s_\alpha(\beta) \in R^+$ , und natürlich ist  $s_\alpha(\beta) \neq \alpha$ , was zu zeigen war.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten, denn es ist

$$\begin{aligned} s_\alpha \left( \sum_{\alpha' \in R^+} \alpha' \right) &= s_\alpha \left( \left( \sum_{\alpha' \in R^+ \setminus \{\alpha\}} \alpha' \right) + \alpha \right) \\ &= s_\alpha \left( \sum_{\alpha' \in R^+ \setminus \{\alpha\}} \alpha' \right) - \alpha \\ &= \left( \sum_{\alpha' \in R^+ \setminus \{\alpha\}} \alpha' \right) - \alpha. \end{aligned}$$

□

Sei nun  $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$  die von den  $s_\alpha, \alpha \in \Pi$  erzeugte Untergruppe.

**Lemma 9.22.**  $\mathcal{W}'$  operiert transitiv auf der Menge der Weylkammer, d.h. ist  $C'$  eine weitere Weylkammer so gibt es ein  $w \in \mathcal{W}'$  mit  $w(C) = C'$ .

*Beweis.* Sei  $\gamma' \in C'$  und sei  $w \in \mathcal{W}'$  so gewählt, daß  $(w(\gamma'), \rho)$  maximal ist. Dann ist

$$(w(\gamma'), \rho) \geq (s_\alpha w(\gamma'), \rho) = (w(\gamma'), s_\alpha(\rho)) = (w(\gamma'), \rho - \alpha),$$

also ist  $(w(\gamma'), \alpha) \geq 0$  für alle  $\alpha \in \Pi$ . Da  $\gamma'$  im Innern von  $C'$  liegt gilt sogar  $(w(\gamma'), \alpha) > 0$ . Damit liegt  $w(\gamma')$  in  $C$  und daraus folgt  $w(C) = C'$ . □

Nach Satz 9.16 operiert  $\mathcal{W}'$  auch transitiv auf der Menge der Basen und der Menge der Systeme positiver Wurzeln.

**Lemma 9.23.** Jede Wurzel gehört zu mindestens einer Basis.

*Beweis.* Sei  $\alpha \in R$  und sei  $C$  eine Weylkammer mit Wand  $H_\alpha$ . Seien  $\Pi$  und  $R^+$  die  $C$  entsprechende Basis und das System positiver Wurzeln. Wir behaupten  $\alpha \in \Pi$ . Um das zu zeigen wählen wir zu  $\epsilon > 0$  ein  $\gamma \in C$  mit  $(\gamma, \alpha) = \epsilon$ , aber  $(\gamma, \alpha') > \epsilon$  für alle  $\alpha' \in R^+ \setminus \{\alpha\}$  (solch ein  $\gamma$  existiert sicherlich). Dann kann sich  $\alpha$  aber nicht als Summe von mindestens zwei positiven Wurzeln schreiben lassen. □

**Lemma 9.24.** Es gilt  $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ .

*Beweis.*  $\mathcal{W}'$  operiert transitiv auf der Menge der Basen, und jede Wurzel gehört zu mindestens einer Basis. Zu jeder Wurzel  $\beta$  gibt es also ein  $w \in \mathcal{W}'$  mit  $w(\beta) = \alpha \in \Pi$ . Dann ist  $s_\beta = w s_\alpha w^{-1}$  (Übung). Also  $s_\beta \in \mathcal{W}'$ , also  $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ . □

**Lemma 9.25.** Sei  $l > 1$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \Pi$  nicht notwendigerweise paarweise verschiedene einfache Wurzeln. Seien  $s_1, \dots, s_l$  die entsprechenden einfachen Spiegelungen. Ist  $s_1 \cdots s_{l-1}(\alpha_l)$  negativ, so gibt es  $t$  mit  $1 \leq t < l$  mit

$$s_1 \cdots s_l = s_1 \cdots s_{t-1} s_{t+1} \cdots s_{l-1}.$$

Insbesondere: Ist  $w = s_1 \cdots s_l$  eine Darstellung von  $w \in \mathcal{W}$  als Produkt einfacher Spiegelungen mit minimalem  $l$ , so ist  $w(\alpha_l) \in R^-$ .

*Beweis.* Wir definieren  $\beta_i := s_{i+1} \cdots s_{l-1}(\alpha_l)$  für  $0 \leq i < l-1$  und  $\beta_{l-1} = \alpha_l$ . Wegen  $\beta_0 \in R^-$  und  $\beta_{l-1} \in R^+$  gibt es ein kleinstes  $r > 0$  mit  $\beta_r \in R^+$ . Dann gilt  $s_r(\beta_r) \in R^-$  und damit  $\beta_r = \alpha_r$ , also

$$s_{r+1} \cdots s_{l-1}(\alpha_l) = \alpha_r,$$

also  $s_r = s_{r+1} \cdots s_{l-1} s_l (s_{r+1} \cdots s_{l-1})^{-1}$  und damit

$$\begin{aligned} s_1 \cdots s_{r-1} s_r s_{r+1} \cdots s_l &= s_1 \cdots s_{r-1} s_{r+1} \cdots s_{l-1} s_l (s_{l+1} \cdots s_{l-1})^{-1} (s_{r+1} \cdots s_{l-1}) s_l \\ &= s_1 \cdots s_{r-1} s_{r+1} \cdots s_{l-1}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 9.26.** Ist  $w(\Pi) = \Pi$ , so ist  $w = e$ .

*Beweis.* Ist  $w \neq e$ , so kann  $w$  geschrieben werden als Produkt einfacher Spiegelungen. Wir wählen eine Darstellung  $w = s_{\alpha_1} \circ \cdots \circ s_{\alpha_l}$  mit minimalem  $l$ . Nach Voraussetzung ist  $l > 1$ . Nach Lemma 9.25 gilt  $w(\alpha_l) \in R^-$ . Dies ist ein Widerspruch!  
□

*Beweis von Satz 9.19.* Aussage (1) ist Lemma 9.24. Aussage (2) folgt aus den Lemmata 9.22 und 9.26. □

**9.6. Die Cartan-Matrix.** Sei  $R \subset V$  ein Wurzelsystem und  $\Pi \subset R$  eine Basis.

**Definition 9.27.** Die Matrix

$$C = C(R, \Pi) = (\langle \alpha, \beta^\vee \rangle)_{\alpha, \beta \in \Pi}$$

heißt die *Cartan-Matrix* zu  $(R, \Pi)$ .

Da je zwei Basen unter der Weylgruppe konjugiert sind, hängt die Cartan-Matrix nicht von der Wahl der Basis ab.

Die Einträge der Cartan-Matrix sind ganze Zahlen, jeder Eintrag auf der Diagonalen ist 2, jeder Eintrag außerhalb der Diagonalen ist nicht positiv, es gilt  $0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \leq 3$  falls  $\alpha \neq \beta$ .

**Satz 9.28.** Die Abbildung, die einem Wurzelsystem in einem rationalen Vektorraum seine Cartan-Matrix zuordnet, ist injektiv.

*Beweis.* Übung. Hier ist eine Anleitung: Sind  $R \subset V_{\mathbb{Q}}$  und  $R' \subset V'_{\mathbb{Q}}$  Wurzelsysteme mit derselben Cartan-Matrix, so betrachte man den durch die Identifikation der einfachen Wurzeln entstehenden Isomorphismus  $\phi$  zwischen  $V_{\mathbb{Q}}$  und  $V'_{\mathbb{Q}}$ . Man zeige, daß dieser Isomorphismus verträglich ist mit den Operationen der einfachen Spiegelungen. Daraus leite man einen Isomorphismus der entsprechenden Weylgruppen ab. Nun benutze man, daß jede Wurzel unter der Weylgruppe konjugiert ist zu einer einfachen Wurzel, um  $\phi(R) = R'$  zu zeigen. □

**9.7. Das Dynkin-Diagramm.** Die gleiche Information wie die Cartan-Matrix hat auch das Dynkin-Diagramm. Es wird wie folgt konstruiert: Die Ecken entsprechen den einfachen Wurzeln, die Ecken zu  $\alpha$  und  $\beta$  werden durch einen  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ -fachen Strich verbunden, falls  $\alpha \neq \beta$ , (ein nullfacher Strich ist eben kein Strich). Doppelte und dreifache Striche zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  werden mit einem Pfeil versehen, der in Richtung  $\alpha$  zeigt, falls  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$ .

**9.8. Irreduzible Wurzelsysteme.** Sind  $R_1 \subset V_1$  und  $R_2 \subset V_2$  Wurzelsysteme. So ist auch  $R_1 \oplus R_2 := R_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times R_2 \subset V_1 \oplus V_2$  ein Wurzelsystem.

Ein Wurzelsystem heißt *unzerlegbar*, falls es nicht isomorph ist zu einer direkten Summe zweier Wurzelsysteme.

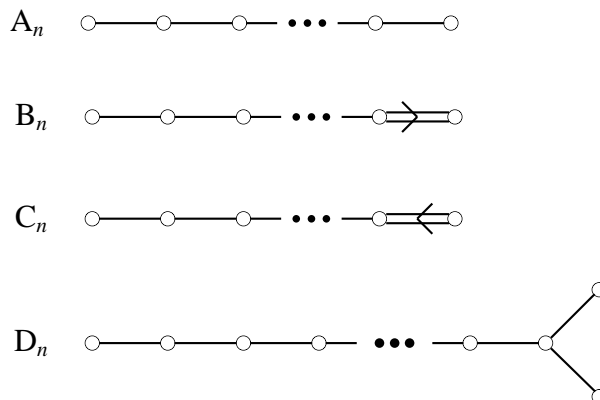
**Lemma 9.29.** Sei  $R \subset V$  ein Wurzelsystem. So gibt es genau eine disjunkte Zerlegung  $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$ , so daß jedes  $R_i$  im von  $R_i$  erzeugten Teilraum  $V_i$  ein Wurzelsystem ist, und es gilt  $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ .

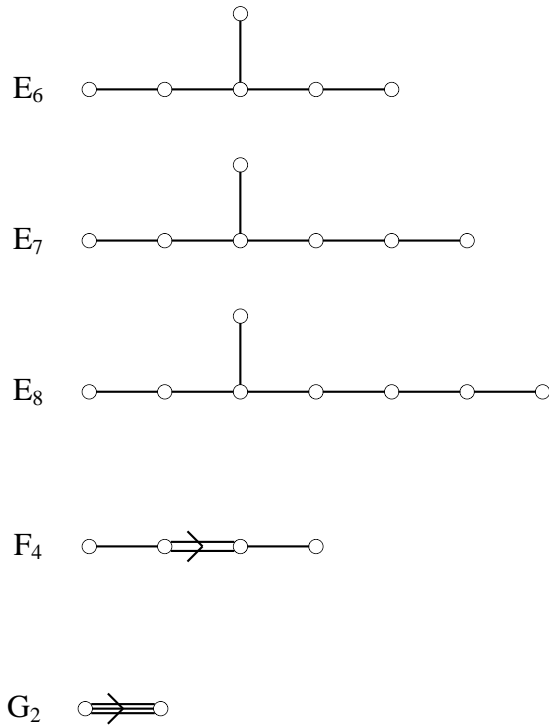
*Beweis.* Sei  $\sim$  die von  $\alpha \sim \beta$ , falls  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0$  auf  $R$  erzeugte Äquivalenzrelation, und  $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$  die Zerlegung in Äquivalenzklassen. Man erkennt ohne größere Probleme, daß  $R_i$  im von  $R_i$  erzeugten Vektorraum  $V_i$  ein Wurzelsystem ist.

Für jedes  $i$  ist die Summe der  $V_j$  mit  $j \neq i$  genau der Raum aller Vektoren  $v$  mit  $\langle v, \alpha^\vee \rangle = 0$  für alle  $\alpha \in R_i$ . Per Induktion erhalten wir, daß die Summe der  $V_i$  direkt ist. Offenbar ist dies die Zerlegung, die wir suchten.  $\square$

### 9.9. Klassifikation von Wurzelsystemen.

**Satz 9.30.** Die irreduziblen Wurzelsysteme entsprechen genau den Dynkin-Diagrammen der folgenden Liste:





*Beweis.* Der Beweis ist aufwendig und besteht zum größten Teil darin, Unterdiagramme bestimmter Formen auszuschliessen. Wir lassen ihn aus und verweisen auf das Buch von Humphreys. □

10. Z K

L -A

Zur Erinnerung: Jede halbeinfache komplexe Lie-Algebra ist die direkte Summe von einfachen Lie-Algebren nach Satz 5.1.

**Lemma 10.1.** *Ist  $\mathfrak{g}$  eine einfache komplexe Lie-Algebra und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartansche Unter algebra, so ist das entsprechende Wurzelsystem  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  irreduzibel.*

*Beweis.* Ist  $R$  nicht irreduzibel, so gibt es eine Zerlegung  $R = R_1 \oplus R_2$  mit Wurzelsystemen  $R_1$  und  $R_2$ . Sei  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$  die Unter-Lie-Algebra, die von allen  $\mathfrak{g}_\alpha$  mit  $\alpha \in R_1$  erzeugt wird.

Für alle  $\alpha \in R_1$  und  $\beta \in R_2$  gilt  $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ , da  $\alpha + \beta$  keine Wurzel ist. Daraus folgt, daß  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$  ein Ideal ist (man benutze die Jacobi-Identität!). Da  $\mathfrak{g}_\beta \notin \mathfrak{g}'$  für alle  $\beta \in R_2$  ist  $\mathfrak{g}'$  sogar ein echtes Ideal im Widerspruch zur Einfachheit von  $\mathfrak{g}$ . □

**Proposition 10.2.** *Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Lie-Algebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartansche Unter algebra und  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  das entsprechende Wurzelsystem. Sei  $\Pi \subset R$  eine Basis von  $R$ . Dann wird  $\mathfrak{g}$  als Lie-Algebra erzeugt von den Unterräumen  $\mathfrak{g}_\alpha$  und  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $\alpha \in \Pi$ .*

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$  die von den Unterräumen  $\mathfrak{g}_\alpha$  und  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $\alpha \in \Pi$  erzeugte Unteralgebra. Nach Lemma 8.4 und Satz 8.6 müssen wir nur zeigen, daß  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$  und  $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}'$  für alle  $\beta \in R$ .

Sei  $R^+$  die zur Basis  $\Pi$  gehörende Menge positiver Wurzeln und  $\beta, \beta' \in R^+$ . Nach Satz 8.11 ist mit  $\mathfrak{g}_\beta$  und  $\mathfrak{g}_{\beta'}$  auch  $\mathfrak{g}_{\beta+\beta'}$  in  $\mathfrak{g}'$  enthalten. Da jede positive Wurzel sich schreiben läßt als Summe  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$  mit  $\alpha_i \in \Pi$  und  $\alpha_1 + \dots + \alpha_j \in R^+$  für alle  $1 \leq j \leq n$  (siehe Lemma 9.12), ist also  $\bigoplus_{\beta \in R^+} \mathfrak{g}_\beta$  im Erzeugnis der  $\mathfrak{g}_\alpha$  mit  $\alpha \in \Pi$ . Analog erkennen wir, daß  $\bigoplus_{\beta \in R^+} \mathfrak{g}_{-\beta}$  im Erzeugnis der  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $\alpha \in \Pi$  enthalten ist. Also ist  $\bigoplus_{\beta \in R} \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}'$ . Nach der Definition der Kowurzeln ist dann auch  $\beta^\vee \in \mathfrak{g}'$  für jedes  $\beta \in R$ . Nach Satz 8.10 erzeugen die Wurzeln den Vektorraum  $\mathfrak{h}^*$  erzeugen, die Kowurzeln erzeugen also den Vektorraum  $\mathfrak{h}$  (hierzu siehe Lemma 9.6). Also ist  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$  und damit die Proposition bewiesen.  $\square$

**Satz 10.3.** *Seien  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}'$  einfache komplexe Lie-Algebren und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$  Cartansche Unteralgebren. Seien  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  und  $R' = R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$  die entsprechenden Wurzelsysteme. Sei  $\phi^*: (\mathfrak{h}')^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  ein Isomorphismus von Vektorräumen mit  $\phi^*(R') = R$ . Dann gibt es einen Isomorphismus  $\Phi: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'$  von Lie-Algebren mit  $\Phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$  und  $(\Phi|_{\mathfrak{h}})^* = \phi^*$ .*

*Beweis.* Für  $\alpha \in R$  sei  $\alpha' \in R'$  die eindeutig bestimmte Wurzel mit  $\phi^*(\alpha') = \alpha$ . Wir betrachten die zur gegebenen Abbildung  $\phi^*$  duale Abbildung  $\phi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ . Diese Abbildung führt die Kowurzelsysteme ineinander über und es gilt  $\phi(\alpha^\vee) = (\alpha')^\vee$ .

Wir fixieren nun eine Basis  $\Pi \subset R$  und definieren  $\Pi' := (\phi^*)^{-1}(\Pi)$ . Wir wählen für alle  $\alpha \in \Pi$  Elemente  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  und  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , so daß  $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ . Genauso können wir entsprechende Elemente  $x'_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{\alpha'}$ ,  $y'_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{-\alpha'}$  für  $\alpha' \in \Pi'$  wählen.

Jetzt betrachten wir die halbeinfache komplexe Lie-Algebra  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ . Für  $\alpha \in \Pi$  definieren wir

$$\begin{aligned}\bar{x}_\alpha &:= (x_\alpha, x'_{\alpha'}), \\ \bar{y}_\alpha &:= (y_\alpha, y'_{\alpha'}).\end{aligned}$$

Sei  $\bar{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$  die von den Elementen  $\bar{x}_\alpha$  und  $\bar{y}_\alpha$  für  $\alpha \in \Pi$  erzeugte Unter-Lie-Algebra.

Wir werden nun zeigen, daß die beiden Projektionen  $\bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$  und  $\bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}'$  Isomorphismen von Lie-Algebren sind, woraus die Existenz eines Isomorphismus wie im Satz folgt, denn dieser Isomorphismus führt offenbar  $\alpha^\vee$  über in  $(\alpha')^\vee$ , also  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{h}'$ , so daß die duale Abbildung mit  $\phi^*$  übereinstimmt.

Zunächst zeigen wir, daß  $\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ . Dazu wählen wir  $\beta \in R^+$  ( $R^+$  ist das durch  $\Pi$  gegebene System positiver Wurzeln) mit der Eigenschaft, daß  $\alpha + \beta$  keine Wurzel ist für alle  $\alpha \in \Pi$ . Dann wählen wir Elemente  $x \in \mathfrak{g}_\beta$  und  $x' \in \mathfrak{g}'_{\beta'}$  mit  $x \neq 0$ ,  $x' \neq 0$  und definieren  $\bar{x} := (x, x')$ . Sei nun  $X \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$  der von allen Ausdrücken

$$\text{ad } \bar{y}_{\alpha_1} \cdots \text{ad } \bar{y}_{\alpha_n}(\bar{x}) \tag{*}$$

mit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Pi$  erzeugte Untervektorraum. Wir behaupten, daß  $X$  ein  $\bar{\mathfrak{g}}$ -Untermodul in  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$  ist.

Wir müssen zeigen, daß  $X$  von allen  $\bar{x}_\alpha$  und  $\bar{y}_\alpha$  mit  $\alpha \in \Pi$  stabilisiert wird. Für  $\bar{y}_\alpha$  folgt dies direkt aus der Definition. Wir definieren  $\bar{h}_\alpha = [\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha]$ . Per Induktion über

$n$  sieht man, daß  $X$  auch stabil ist unter der Operation von allen  $\text{ad } \bar{h}_\alpha$ . Es bleibt zu zeigen, daß  $X$  stabil ist unter allen  $\text{ad } \bar{x}_\alpha$ .

Wir wenden  $\text{ad } \bar{x}_\alpha$  an auf einen Ausdruck der Form (\*) und kommutieren  $\text{ad } \bar{x}_\alpha$  schrittweise an den  $\text{ad } \bar{y}_{\alpha_i}$  vorbei. Wegen  $[\bar{x}_\alpha, \bar{y}_{\alpha_i}] = 0$ , falls  $\alpha \neq \alpha_i$ , und  $[\bar{x}_\alpha, \bar{y}_{\alpha_i}] = \bar{h}_\alpha$ , falls  $\alpha = \alpha_i$ , erhalten wir beim Kommutieren nur Summen von Produkten von  $\text{ad } \bar{y}_{\alpha_i}$ 's und  $\text{ad } \bar{h}_\alpha$ 's. Nun ist, wegen der Maximalität von  $\beta$ ,  $\text{ad } \bar{x}_\alpha(\bar{x}) = 0$ . Also ist  $X$  stabil unter der Operation von  $\text{ad } \bar{x}_\alpha$ , was zu zeigen war.

Der Raum  $X \cap \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta'}$  ist eindimensional, insbesondere ist  $X \neq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ . Wäre nun  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ , so wäre  $X$  ein echtes Ideal in  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ . Nun sind aber die direkten Summanden  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}'$  die einzigen echten Ideale in  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ . Wegen  $X \neq \mathfrak{g}$ ,  $X \neq \mathfrak{g}'$  erhalten wir einen Widerspruch.

Wir haben nun also gezeigt, daß  $\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ . Wir zeigen nun, daß die Projektionen  $p_1: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$  und  $p_2: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}'$  Isomorphismen sind. Beide Abbildungen sind sicherlich surjektiv. Elemente aus dem Kern von  $p_1$  sind von der Form  $(0, x)$  für ein  $x \in \mathfrak{g}'$ . Die Elemente  $x \in \mathfrak{g}'$  mit  $(0, x) \in \bar{\mathfrak{g}}$  bilden ein Ideal in  $\mathfrak{g}'$  (wegen der Surjektivität von  $p_2$ ). Also ist entweder  $0 = \ker p_1$  oder  $\mathfrak{g}' = \ker p_1$ . Im zweiten Fall ist dann auch  $\ker p_2 = \mathfrak{g}$ , somit  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$  im Widerspruch zu oben Gezeigtem.

Damit sind also  $p_1$  und  $p_2$  injektiv, also Isomorphismen. Die Verkettung  $p_2 \circ p_1^{-1}$  ist der Isomorphismus, den wir suchten.  $\square$

*Bemerkung 10.4.* Insbesondere ist also die Abbildung, die einer einfachen Lie-Algebra und einer Cartanschen ihr Wurzelsystem zuordnet, injektiv. Wir wissen aber noch immer nicht, ob das Wurzelsystem unabhängig ist von der Wahl der Cartanschen.

**10.1. Die universelle Einhüllende.** Zur Erinnerung: Ist  $A$  eine assoziative  $k$ -Algebra, so definiert die bilineare Abbildung

$$[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A$$

$$(x, y) \mapsto xy - yx$$

die Struktur einer Lie-Algebra auf  $A$ .

Sei nun  $\mathfrak{g}$  eine  $k$ -Lie Algebra.

**Definition 10.5.** Ein Paar  $(U, \text{can})$ , bestehend aus einer assoziativen unitären  $k$ -Algebra  $U$  und einem Homomorphismus  $\text{can}: \mathfrak{g} \rightarrow U$  von Lie-Algebren heißt *universelle Einhüllende* von  $\mathfrak{g}$ , wenn folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist  $(A, j)$  ein weiteres Paar bestehend aus einer assoziativen unitären  $k$ -Algebra  $A$  und einem Homomorphismus  $j: \mathfrak{g} \rightarrow A$  von Lie-Algebren, so gibt es genau einen Homomorphismus  $f: U \rightarrow A$  von unitären  $k$ -Algebren, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{can}} & U \\ & \searrow j & \downarrow f \\ & & A. \end{array}$$

**Satz 10.6.** Zu jeder  $k$ -Lie Algebra  $\mathfrak{g}$  existiert eine universelle Einhüllende  $(U(\mathfrak{g}), \text{can})$ . Sie ist bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig.

Wir unterdrücken oft die Abbildung  $\text{can}$  und nennen  $U(\mathfrak{g})$  selbst die universelle Einhüllende.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt sofort aus der universellen Eigenschaft. Die Existenz beweisen wir im folgenden Abschnitt.  $\square$

**10.2. Darstellungen von  $\mathfrak{g}$  und von  $U(\mathfrak{g})$ .** Ist  $V$  ein  $k$ -Vektorraum und ist  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , so liefert uns die universelle Eigenschaft der Einhüllenden einen Homomorphismus unitärer Algebren  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_k(V)$ , also eine Darstellung von  $U(\mathfrak{g})$ . Ist umgekehrt  $\rho': U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_k(V)$  eine Darstellung von  $U(\mathfrak{g})$ , so liefert uns die Verkettung mit der Abbildung  $\text{can}: \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$  einen Homomorphismus  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  von Lie-Algebren, also eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Natürlich entsprechen sich unter diesen zueinander inversen Konstruktionen auch Homomorphismen zwischen Darstellungen, also entsprechen sich auch Unterabbildungen, Quotienten, direkte Summen, etc... Die Darstellungstheorien von  $U(\mathfrak{g})$  und von  $\mathfrak{g}$  sind also *äquivalent*. Insbesondere ist die Darstellungstheorie von Lie-Algebren also ein Spezialfall der Darstellungstheorie von assoziativen Algebren.

**10.3. Tensoralgebren.** Sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Für  $n \geq 0$  sei

$$T^n V := V \otimes_k \cdots \otimes_k V$$

das Tensorprodukt über  $k$  von  $n$  Kopien von  $V$  (das 0-fache Tensorprodukt ist  $T^0 V := k$ ), und

$$T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} T^n V.$$

Für  $n, m \geq 0$  gibt es einen offensichtlichen Isomorphismus  $T^n V \otimes_k T^m V \rightarrow T^{m+n} V$ . Diese Isomorphismen lassen sich bilinear auf ganz  $T(V)$  ausdehnen und definieren eine Verknüpfung

$$T(V) \otimes_k T(V) \rightarrow T(V),$$

die  $T(V)$  mit der Struktur einer  $k$ -Algebra versieht. Wir nennen  $T(V)$  aus offensichtlichen Gründen die *Tensoralgebra* von  $V$ . Die Tensoralgebra ist unitär und assoziativ, im Allgemeinen aber nicht kommutativ. Wir bezeichnen mit  $\text{can}' : V = T^1(V) \subset T(V)$  die kanonische Einbettung.

**Satz 10.7** (Universelle Eigenschaft der Tensoralgebra). *Sei  $A$  eine assoziative unitäre  $k$ -Algebra und  $j: V \rightarrow A$  ein Homomorphismus von  $k$ -Vektorräumen. Dann gibt es genau einen Homomorphismus  $f: T(V) \rightarrow A$  von unitären  $k$ -Algebren, so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{can}'} & T(V) \\ & \searrow j & \downarrow f \\ & & A \end{array}$$

*kommutiert.*

*Beweis.* Übung.  $\square$

Nun zeigen wir die Existenz einer universellen Einhüllenden der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Sei  $T(\mathfrak{g})$  die Tensoralgebra über dem Vektorraum  $\mathfrak{g}$  und  $J \subset T(\mathfrak{g})$  das zweiseitige Ideal, das von allen Elementen  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$  mit  $x, y \in \mathfrak{g}$  erzeugt wird. Wir definieren

$$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J.$$

Sei

$$\text{can}: \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{can}'} T(\mathfrak{g}) \rightarrow T(\mathfrak{g})/J = U(\mathfrak{g})$$

die Verkettung.

**Satz 10.8.** *Das Paar  $(U(\mathfrak{g}), \text{can})$  ist eine universelle Einhüllende von  $\mathfrak{g}$ .*

*Beweis.* Sei  $(A, j)$  ein Paar bestehend aus einer unitären assoziativen  $k$ -Algebra  $A$  und einem Homomorphismus  $j: \mathfrak{g} \rightarrow A$  von Lie-Algebren. Nach der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus  $T(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{can}} & T(\mathfrak{g}) \\ & \searrow j & \downarrow \\ & & A \end{array}$$

kommutiert. Das Ideal  $J$  liegt nun im Kern der Abbildung  $T(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ , denn  $j$  ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Wir erhalten also eine induzierte Abbildung  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{can}} & U(\mathfrak{g}) \\ & \searrow j & \downarrow \\ & & A \end{array}$$

kommutiert. Die Eindeutigkeit der Abbildung  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  folgt daraus, daß das Bild von  $\mathfrak{g}$  in  $T(\mathfrak{g})$  die Tensoralgebra (als unitäre Algebra) erzeugt, das Bild von  $\mathfrak{g}$  also auch  $U(\mathfrak{g})$  erzeugt.  $\square$

**10.4. Das PBW-Theorem.** Sei  $\{x_i\}_{i \in I}$  eine Basis der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und  $\leq$  eine totale Ordnung auf  $I$ . Wir schreiben  $\bar{x}_i = \text{can}(x_i)$  für das Bild von  $x_i$  in der universellen Einhüllenden von  $\mathfrak{g}$ . Ein Monom  $\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_n}$  in  $U(\mathfrak{g})$  heiße *geordnet*, falls  $i_1 \leq \cdots \leq i_n$  gilt.

**Satz 10.9** (Satz von Poincaré–Birkhoff–Witt). *Die geordneten Monome, also die Monome der Form*

$$\bar{x}_{i(1)} \cdots \bar{x}_{i(n)}$$

für  $n \geq 0$  und  $i(1), \dots, i(n) \in I$  mit  $i(1) \leq \cdots \leq i(n)$ , bilden eine Basis von  $U(\mathfrak{g})$ .

(Für  $n = 0$  fassen wir  $1 \in U(\mathfrak{g})$  als das leere Monom auf.)

*Beweis.* Zunächst ist klar, daß die ungeordneten Monome  $\bar{x}_{i(1)} \cdots \bar{x}_{i(n)}$  mit  $i(1), \dots, i(n) \in I$  den Vektorraum  $U(\mathfrak{g})$  erzeugen (denn sie erzeugen sogar die Tensoralgebra). Mittels der Identität  $\overline{xy} - \overline{yx} = \overline{[x, y]}$  (für  $x, y \in \mathfrak{g}$ ) erkennen wir durch Induktion über den Grad der Monome, daß auch die geordneten Monome den Vektorraum  $U(\mathfrak{g})$  erzeugen.

Wir müssen also noch zeigen, daß die geordneten Monome linear unabhängig sind in  $U(\mathfrak{g})$ . Dazu konstruieren wir eine treue Darstellung von  $U(\mathfrak{g})$  auf der symmetrischen Algebra über  $I$ .

Sei also  $S = k[\hat{x}_i]_{i \in I}$  die symmetrische Algebra über der Basis  $\{\hat{x}_i\}_{i \in I}$ .

**Lemma 10.10.** *Es gibt eine Darstellung  $\rho: U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_k(S)$  derart, daß für ein geordnetes Monom  $\bar{x}_{i(1)} \cdots \bar{x}_{i(n)}$  gilt:*

$$\rho(\bar{x}_{i(1)} \cdots \bar{x}_{i(n)})(1) = \hat{X}_{i(1)} \cdots \hat{X}_{i(n)}.$$

Aus dem Lemma folgt sofort die lineare Unabhängigkeit der geordneten Monome in  $U(\mathfrak{g})$ , also der Satz von Poincaré–Birkhoff–Witt.  $\square$

Wir müssen also noch das Lemma beweisen.

*Beweis des Lemmas.* Für  $r \geq 0$  sei  $S_{\leq r} \subset S$  der von allen Monomen  $\hat{x}_{i(1)} \cdots \hat{x}_{i(l)}$  mit  $l \leq r$  aufgepannte Untervektorraum. Dann ist

$$k = S_{\leq 0} \subset S_{\leq 1} \subset \cdots \subset S$$

eine Filtrierung auf  $S$ . Wir wollen nun für  $x \in \mathfrak{g}$  die Einschränkung von  $\rho(x)$  auf  $S_{\leq r}$  induktiv definieren und nehmen dabei an, daß die Einschränkung von  $\rho(y)$  auf  $S_{\leq r-1}$  schon definiert ist für alle  $y \in \mathfrak{g}$ . Wir wollen  $\rho$  so konstruieren, daß  $\rho(x)(S_{\leq r-1}) \subset S_{\leq r}$  gilt und daß außerdem folgende Aussagen erfüllt sind:

(1) Ist  $\sigma \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r$ , so ist

$$\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r}) = \hat{x}_\sigma \hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r}.$$

(2) Für alle  $\sigma, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in I$  gilt

$$\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r}) \in \hat{x}_\sigma \hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r} + S_{\leq r}.$$

(3) Es gilt für alle  $X \in S_{\leq r-1}$  und alle  $\sigma, \tau \in I$

$$\rho(x_\sigma)\rho(x_\tau)(X) - \rho(x_\tau)\rho(x_\sigma)(X) = \rho([x_\sigma, x_\tau])(X).$$

Für  $r = 0$  können (und müssen) wir offenbar  $\rho(x_\sigma)(1) = \hat{x}_\sigma$  definieren. Dann sind die Eigenschaften (1) bis (3) in obiger Liste sicherlich erfüllt.

Sei also die Einschränkung von  $\rho(y)$  auf  $S_{\leq r-1}$  für alle  $y \in \mathfrak{g}$  schon definiert, so daß (1) bis (3) gelten. Wir wollen die schon definierten Abbildungen nun auf  $S_{\leq r}$  fortsetzen. Dazu wählen wir  $\sigma \in I$ . Wir müssen  $\rho(x_\sigma)$  auf den Monomen  $\hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r}$  für  $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r$  definieren.

Ist nun  $\sigma \leq \lambda_1$ , so müssen wir wegen der Eigenschaft (1)

$$\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r}) = \hat{x}_\sigma \hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r}$$

definieren. Ist aber  $\sigma \not\leq \lambda_1$ , so müssen, wenn die Eigenschaften (1) bis (3) erfüllt sein wollen, folgende Identitäten gelten (wir schreiben  $\hat{x}_{\bar{\lambda}}$  für  $\hat{x}_{\lambda_2} \cdots \hat{x}_{\lambda_r}$ ):

$$\begin{aligned} \rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r}) &= \rho(x_\sigma)\rho(x_{\lambda_1})(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) && \text{nach (1)} \\ &= \rho(x_{\lambda_1})\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) && \text{nach (3)} \\ &= \rho(x_{\lambda_1})(\hat{x}_\sigma \hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})(R) + \rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) && \text{nach (2)} \\ &= \hat{x}_{\lambda_1} \hat{x}_\sigma \hat{x}_{\bar{\lambda}} + \rho(x_{\lambda_1})(R) + \rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) && \text{nach (1)} \end{aligned}$$

für ein  $R \in S_{\leq r-1}$ . Per Induktion sind alle Terme auf der rechten Seite der letzten Gleichung schon definiert und wir können diesen Ausdruck als Definition von  $\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_r})$  benutzen.

Damit haben wir für alle  $y \in \mathfrak{g}$  die Abbildung  $\rho(y)$  auf  $S_{\leq r}$  definiert und müssen noch zeigen, daß die Eigenschaften (1) bis (3) erfüllt sind. Die Eigenschaften (1) und (2) sind relativ offensichtlich, wir müssen also noch die Eigenschaft (3) prüfen.

Wir wollen also zeigen, daß für alle  $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{r-1}$  und  $\sigma, \tau \in I$  die folgende Gleichung gilt:

$$\rho(x_\sigma)\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) - \rho(x_\tau)\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) = \rho([x_\sigma, x_\tau])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}).$$

Hier haben wir  $\hat{x}_{\bar{\lambda}}$  für  $\hat{x}_{\lambda_1} \cdots \hat{x}_{\lambda_{r-1}}$  geschrieben.

Nach unserer Konstruktion gilt diese Gleichung sicherlich für  $\tau \leq \lambda_1$ . Nach der Antisymmetrie der Gleichung also auch für  $\sigma \leq \lambda_1$ . Wir nehmen nun also  $\lambda_1 < \sigma$  und  $\lambda_1 < \tau$  an.

Nun ist nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) &= \rho(x_\tau)\rho(x_{\lambda_1})(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) \\ &= \rho([x_\tau, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}),\end{aligned}$$

wobei wir  $\hat{x}_{\bar{\lambda}}$  für  $\hat{x}_{\lambda_2} \cdots \hat{x}_{\lambda_n}$  geschrieben haben.

Wenden wir auf diese Identität die Abbildung  $\rho(x_\sigma)$  an, wo erhalten wir

$$\begin{aligned}\rho(x_\sigma)\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) &= \rho(x_\sigma)\rho([x_\tau, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_\sigma)\rho(x_{\lambda_1})\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) \\ &= \rho(x_\sigma)\rho([x_\tau, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}])\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})\rho(x_\sigma)\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}),\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus  $\lambda_1 < \tau$  und  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  folgt ????

Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\rho(x_\sigma)\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) &= \rho(x_\sigma)\rho([x_\tau, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}])\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})\rho(x_\sigma)\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}), \\ \rho(x_\tau)\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) &= \rho(x_\tau)\rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_\tau, x_{\lambda_1}])\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})\rho(x_\tau)\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\bar{\lambda}})\end{aligned}$$

Hier ist die zweite analog zur ersten, nur die Rollen von  $\sigma$  und  $\tau$  sind vertauscht. Ziehen wir die rechte Seite der zweiten Gleichung von der rechten Seite der ersten Gleichung ab, so erhalten wir (mithilfe der Induktionsannahme)

$$\begin{aligned}&\rho(x_\sigma)\rho([x_\tau, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}])\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})\rho(x_\sigma)\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) \\ &- \rho(x_\tau)\rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_\tau, x_{\lambda_1}])\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})\rho(x_\tau)\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) \\ &= \rho([x_\sigma, x_{\lambda_1}], x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_\sigma, [x_\tau, x_{\lambda_1}]]) (\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})\rho([x_\sigma, x_\tau])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) \\ &\quad = -\rho([x_\tau, x_\sigma], x_{\lambda_1})(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho(x_{\lambda_1})\rho([x_\sigma, x_\tau])(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) \\ &= -\rho([x_\tau, x_\sigma], x_{\lambda_1})(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_{\lambda_1}, [x_\sigma, x_\tau]) (\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \rho([x_\sigma, x_\tau])\rho(x_{\lambda_1})(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) \\ &\quad = \rho([x_\sigma, x_\tau])\rho(x_{\lambda_1})(\hat{x}_{\bar{\lambda}}), \\ &\quad = \rho([x_\sigma, x_\tau])(\hat{x}_{\bar{\lambda}})\end{aligned}$$

und damit

$$\rho(x_\sigma)\rho(x_\tau)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) - \rho(x_\tau)\rho(x_\sigma)(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) = \rho([x_\sigma, x_\tau])\rho(x_{\lambda_1})(\hat{x}_{\bar{\lambda}}),$$

was zu zeigen war.  $\square$

## 10.5. Erzeuger und Relationen.

**Definition 10.11.** Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{f}$  heißt *frei*, falls es eine Teilmenge  $X \subset \mathfrak{f}$  gibt, so daß folgende Eigenschaft erfüllt ist: Für jede Abbildung  $g: X \rightarrow \mathfrak{g}$  in eine weitere Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  gibt es genau einen Homomorphismus  $f: \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ , so daß  $g = f|_X$ .

Sei  $X$  eine Menge und  $V$  der Vektorraum mit Basis  $X$ . Sei  $\mathfrak{f}(X) \subset T(V)$  die Unter-Lie-Algebra erzeugt von  $\text{can}'(X) \subset T(V)$ . Dann ist  $\mathfrak{f}(X)$  eine freie Lie-Algebra, denn jede Abbildung  $g: X \rightarrow \mathfrak{g}$  induziert einen Homomorphismus  $V \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$  von Vektorräumen. Es gibt also eine eindeutig bestimmte Abbildung  $f': T(V) \rightarrow U(\mathfrak{g})$  von unitären Algebren. Das Bild  $f'(\mathfrak{f}(X))$  ist aber in  $\mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$  enthalten, denn die Menge der Erzeuger  $X$  von  $\mathfrak{f}(X)$  ist in  $\mathfrak{g}$  enthalten. Dies gibt uns eine Abbildung  $f: \mathfrak{f}(X) \rightarrow \mathfrak{g}$  der gesuchten Art. Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, daß die Menge  $X$  die Lie-Algebra  $\mathfrak{f}(X)$  erzeugt.

**Definition 10.12.** Sei  $I \subset \mathfrak{f}(X)$  das von den Elementen  $e_i, i \in I$  erzeugte Ideal. Dann heißt die Lie-Algebra  $\mathfrak{f}(X)/I$  die von der Menge  $X$  mit den Relationen  $e_i = 0$  erzeugte Lie-Algebra.

10.6. **Der Satz von Serre.** Den nächsten Satz beweisen wir in dieser Vorlesung nicht. Man kann einen Beweis beispielsweise im Buch von Humphreys finden. Er gibt eine Präsentation einer halbeinfachen Lie-Algebra mittels Erzeuger und Relationen.

**Satz 10.13.** Sei  $R$  ein Wurzelsystem mit Basis  $\Pi \subset R$ . Sei  $\mathfrak{g}$  die komplexe Lie-Algebra mit Erzeugern  $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$  und den Relationen

$$\begin{aligned} [h_\alpha, h_\beta] &= 0 \\ [x_\alpha, y_\alpha] &= h_\alpha & [x_\alpha, y_\beta] &= 0 \text{ (falls } \alpha \neq \beta) \\ [h_\alpha, x_\beta] &= \langle \alpha, \beta^\vee \rangle x_\beta & [h_\alpha, y_\beta] &= -\langle \alpha, \beta^\vee \rangle y_\beta \\ \text{ad}(x_\alpha)^{-\langle \alpha, \beta^\vee \rangle + 1}(x_\beta) &= 0 \text{ (falls } \alpha \neq \beta) \\ \text{ad}(y_\alpha)^{-\langle \alpha, \beta^\vee \rangle + 1}(y_\beta) &= 0 \text{ (falls } \alpha \neq \beta) \end{aligned}$$

für alle  $\alpha, \beta \in \Pi$ .

Dann ist  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale halbeinfache komplexe Lie-Algebra, der von den  $h_\alpha$  erzeugte Untervektorraum  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  ist eine Cartansche Untereralgebra und das entsprechende Wurzelsystem ist kanonisch isomorph zu  $R$ .

*Bemerkung 10.14.* Sei  $\mathfrak{g}'$  eine halbeinfache Lie-Algebra,  $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$  eine Cartansche Untereralgebra und  $R \subset \mathfrak{h}'^*$  das Wurzelsystem. Nach Wahl einer Basis  $\Pi$  in  $R$  können wir Elemente  $x'_\alpha, y'_\alpha$ , und  $h'_\alpha$  für alle  $\alpha \in \Pi$  wählen, die die entsprechende Kopie von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  in  $\mathfrak{g}'$  aufspannen. Wir haben schon gesehen, daß  $x'_\alpha, y'_\alpha$ , und  $h'_\alpha$  die Relationen im Satz von Serre erfüllen.

Sei  $\mathfrak{g}$  die dem Wurzelsystem  $R$  nach dem Satz von Serre zugeordnete Lie-Algebra. Dann gibt es also einen Homomorphismus  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ , der  $x_\alpha$  auf  $x'_\alpha, y_\alpha$  auf  $y'_\alpha$  und  $h_\alpha$  auf  $h'_\alpha$  abbildet.

Da  $x'_\alpha, y'_\alpha$ , und  $h'_\alpha$  die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}'$  erzeugen, ist obiger Homomorphismus surjektiv. Da der Homomorphismus ein Isomorphismus auf den Cartanschen  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{h}'$  ist, da die Wurzelsysteme von  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}'$  übereinstimmen und alle Wurzelräume eindimensional sind, sind  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}'$  also isomorph.

11. D

L -A

Von nun an sei  $\mathfrak{g}$  eine komplexe, endlich dimensionale, halbeinfache Lie-Algebra und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartansche Untereralgebra,  $R \subset \mathfrak{h}^*$  das entsprechende Wurzelsystem.

Sei nun  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Wir nennen  $V$  auch oft einen *Modul* über der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ .

**Definition 11.1.**  $V$  heißt *Gewichtsmodul* (bzgl.  $\mathfrak{h}$ ), falls

$$v = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

gilt, wobei  $V_\lambda$  der  $\lambda$  entsprechende simultane Eigenraum zur Operation von  $\mathfrak{h}$  ist, also

$$V_\lambda = \{v \in V \mid h.v = \lambda(h)v \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ein  $\lambda$  mit  $V_\lambda \neq 0$  heißt *Gewicht* von  $V$ .

**Übung 11.2.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartansche Unteralgebra. Sei  $V$  ein Gewichtsmodul von  $\mathfrak{g}$  bzgl.  $\mathfrak{h}$ . Man zeige, daß dann auch jeder Quotient und jeder Untermodul ein Gewichtsmodul bzgl.  $\mathfrak{h}$  ist, und daß die Menge der Gewichte eines Quotienten oder Untermoduls von  $V$  eine Teilmenge der Gewichte von  $V$  ist.

**11.1. Höchstgewichtsmodul.** Sei  $R^+ \subset R$  ein System positiver Wurzeln. Die Wahl von  $R^+$  induziert eine partielle Ordnung auf der Menge  $\mathfrak{h}^*$ : Für  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$  definieren wir  $\lambda \geq \mu$ , falls  $\lambda - \mu$  sich als Summe von Elementen aus  $R^+$  schreiben läßt, falls also

$$\lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} R^+$$

gilt.

**Definition 11.3.** Sei  $V$  ein Modul über  $\mathfrak{g}$  und  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Dann heißt  $V$  ein *Modul zum höchsten Gewicht*  $\lambda$ , falls folgende Aussagen gelten:

- (1)  $V$  ist ein Gewichtsmodul bzgl.  $\mathfrak{h}$ ,
- (2) es gibt ein Element  $v \in V_\lambda$ ,  $v \neq 0$ , das  $V$  erzeugt,
- (3) ist  $\mu$  ein Gewicht von  $V$ , so gilt  $\mu \leq \lambda$ .

**11.2. Borelsche Unteralgebren.** Wir wollen in diesem Abschnitt Moduln mit höchstem Gewicht  $\lambda$  untersuchen. Dazu definieren wir zunächst die unserer Wahl von positiven Wurzeln entsprechende Unteralgebra

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

$\mathfrak{b}$  ist eine Unter-Lie-Algebra wegen  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$  und  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ . Sie heißt die  $R^+$  entsprechende *Borelsche* Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ . Nun ist

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

also ist der Homomorphismus  $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{h}$  mit Kern  $\bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

Sei nun  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Da  $\mathfrak{h}$  eine abelsche Unter-Lie-Algebra von  $\mathfrak{g}$  ist, definiert die lineare Abbildung  $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C})$ ,  $\rho(h) = \lambda(h)\text{id}_{\mathbb{C}}$  einen eindimensionalen  $\mathfrak{h}$ -Modul, den wir mit  $\mathbb{C}_\lambda$  bezeichnen. Mittels des Homomorphismus  $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{h}$  wird  $\mathbb{C}_\lambda$  also ein  $\mathfrak{b}$ -Modul, auf dem die Wurzelräume  $\mathfrak{g}_\alpha$  für  $\alpha \in R^+$  durch Null operieren, und die Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  durch die Linearform  $\lambda$ .

Die Inklusion  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{can}} U(\mathfrak{g})$  induziert eine Abbildung

$$U(\mathfrak{b}) \rightarrow U(\mathfrak{g}),$$

die nach dem PBW-Theorem ebenfalls eine Inklusion ist. Wir können  $U(\mathfrak{g})$  also als Modul über der Algebra  $U(\mathfrak{b})$  auffassen.

**Definition 11.4.** Der *Verma-Modul* über  $\mathfrak{g}$  zum Gewicht  $\lambda$  ist

$$\Delta(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda.$$

Wir definieren

$$v_\lambda := 1 \otimes 1 \in U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda = \Delta(\lambda).$$

Wir definieren die Abbildung  $P: \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  als

$$P(\nu) = \text{Anzahl der Darstellungen von } \nu \text{ als Summe von Elementen aus } R^+.$$

Beispielsweise ist  $P(\nu) = 0$  für alle  $\nu \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}R^+$  und  $P(\alpha) = 1$  für  $\alpha \in \Pi$ , wobei  $\Pi$  die  $R^+$  entsprechende Basis ist. Man nennt  $P$  die *Kostantsche Partitionsfunktion*.

Sei  $\mathfrak{n}^- := \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Dann ist  $\mathfrak{n}^- \subset \mathfrak{g}$  eine Unteralgebra.

**Proposition 11.5.** Sei  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ .

(1) Der Verma-Modul  $\Delta(\lambda)$  ist frei über  $\mathfrak{n}^-$ , d.h. die Abbildung

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{n}^-) &\rightarrow \Delta(\lambda) \\ X &\mapsto X \cdot v_\lambda \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von  $U(\mathfrak{n}^-)$ -Moduln.

(2)  $\Delta(\lambda)$  ist ein Gewichtsmodul und es gilt

$$\dim \Delta(\lambda)_\mu = P(\lambda - \mu).$$

(3) Der Verma-Modul  $\Delta(\lambda)$  ist ein Modul zum höchsten Gewicht  $\lambda$ .

(4) Sei  $V$  ein Modul zum höchsten Gewicht  $\lambda$  und  $v \in V_\lambda$ . Dann gibt es genau einen Homomorphismus von Moduln

$$f: \Delta(\lambda) \rightarrow V$$

mit  $f(v_\lambda) = v$ . Ist  $v \neq 0$ , so ist  $f$  surjektiv. Insbesondere ist jeder Modul mit höchstem Gewicht  $\lambda$  ein Quotient von  $\Delta(\lambda)$ .

*Beweis.* Nach dem PBW-Theorem ist  $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{b})$  sogar als  $U(\mathfrak{b})$ -Rechtsmodul. Damit ist

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda = U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda \cong U(\mathfrak{n}^-)$$

als  $U(\mathfrak{n}^-)$ -Modul. Damit haben wir (1) gezeigt.

Die Aussage (2) ist ebenfalls eine Konsequenz des PBW-Theorems: Wählen wir eine Basis  $Y_\alpha$  des Wurzelraums  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  für jedes  $\alpha \in R^+$  sowie eine Ordnung  $\leq$  auf  $R^+$ , so bilden nach dem PBW-Theorem die geordneten Monome

$$Y_{\alpha_1} \cdots Y_{\alpha_l}$$

eine Basis von  $U(\mathfrak{n}^-)$ . Also bilden, nach (1), die Vektoren

$$Y_{\alpha_1} \cdots Y_{\alpha_l} \cdot v_\lambda$$

eine Basis von  $\Delta(\lambda)$ . Jeder dieser Vektoren ist aber ein Gewichtsvektor, genauer ist das Gewicht von  $Y_{\alpha_1} \cdots Y_{\alpha_l} \cdot v_\lambda$  gerade  $\lambda - \alpha_1 - \cdots - \alpha_l$ . Es gibt aber offenbar  $P(\alpha_1 + \cdots + \alpha_l)$  verschiedene Basisvektoren von diesem Gewicht, also gilt (2).

Der Verma-Modul  $\Delta(\lambda)$  wird offenbar von  $v_\lambda$  erzeugt und nach (2) ist  $\Delta(\lambda)$  ein Gewichtsmodul und jedes Gewicht ist kleiner oder gleich  $\lambda$ . Damit ist  $\Delta(\lambda)$  ein Modul vom höchsten Gewicht  $\lambda$ .

Schließlich zeigen wir noch (4). Ist  $V$  wie in (4) gegeben, so können wir den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_\lambda &\rightarrow V_\lambda \subset V \\ 1 &\mapsto v \end{aligned}$$

von  $\mathfrak{h}$ -Moduln definieren. Da  $\lambda$  ein maximales Gewicht von  $V$  ist, ist dieser Homomorphismus sogar ein Homomorphismus von  $\mathfrak{b}$ -Moduln. Wir erhalten einen induzierten Homomorphismus

$$f: U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda \rightarrow V$$

$$X \otimes 1 \mapsto X.v.$$

es gilt  $f(v_\lambda) = f(1 \otimes 1) = v$ . Eine solche Abbildung  $f$  ist eindeutig, da  $v_\lambda$  den Verma-Modul erzeugt.

Ist  $v \in V_\lambda$  ein Erzeuger von  $V$ , so muß  $f$  surjektiv sein. Also ist  $\dim V_\lambda = 1$ , folglich erzeugt jeder nicht-triviale Vektor in  $V_\lambda$  den Modul  $V$ , und damit ist  $f$  für jedes  $v \in V_\lambda, v \neq 0$  surjektiv.  $\square$

### 11.3. Einfache Höchstgewichtsmoduln.

**Satz 11.6.** *Zu jedem  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung  $L(\lambda)$  mit höchstem Gewicht  $\lambda$ . Sie ist isomorph zum eindeutig bestimmten einfachen Quotienten von  $\Delta(\lambda)$ .*

*Beweis.* Wir zeigen als ersten Schritt, daß jeder Verma-Modul  $\Delta(\lambda)$  einen eindeutig bestimmten maximalen echten Untermodul  $J(\lambda)$  besitzt. Dazu müssen wir zeigen, daß die Summe aller echten Untermoduln ein echter Untermodul von  $\Delta(\lambda)$  ist. Nun ist jeder Untermodul  $N \subset \Delta(\lambda)$  nach Übung 11.2 ein Gewichtsmodul. Da nach Proposition 11.5 der Gewichtsraum  $\Delta(\lambda)$  zum höchsten Gewicht  $\lambda$  vom Erzeuger  $v_\lambda$  aufgespannt wird, muß jedes Gewicht von  $N$  echt kleiner als  $\lambda$  sein. Damit ist aber auch jedes Gewicht der Summe  $J(\lambda)$  aller echten Untermoduln echt kleiner als  $\lambda$ . Insbesondere ist also  $J(\lambda) \neq \Delta(\lambda)$ .

Nun betrachten wir

$$L(\lambda) := \Delta(\lambda)/J(\lambda).$$

und die kanonische Quotientenabbildung  $\pi: \Delta(\lambda) \rightarrow L(\lambda)$ . Ist  $N \subset L(\lambda)$  ein Untermodul, so ist  $\pi^{-1}(N) \subset \Delta(\lambda)$  ein Untermodul, der  $J(\lambda)$  umfasst. Es gilt also  $\pi^{-1}(N) = J(\lambda)$ , also  $N = 0$ , oder  $\pi^{-1}(N) = \Delta(\lambda)$ , also  $N = L(\lambda)$ . Also ist  $L(\lambda)$  einfach. Nun ist nach Übung 11.2  $L(\lambda)$  ein Gewichtsmodul und für jedes Gewicht  $\mu$  gilt  $\mu \leq \lambda$ . Darüberhinaus wird  $L(\lambda)$  von  $\pi(v_\lambda)$  erzeugt. Also ist  $L(\lambda)$  ein einfacher Höchstgewichtsmodul und wir haben die Existenzaussage des Satzes bewiesen.

Ist nun  $L(\lambda)'$  ein weiterer Höchstgewichtsmodul, so gibt es nach Proposition 11.5 einen Homomorphismus

$$f: \Delta(\lambda) \rightarrow L(\lambda)'$$

mit  $f(v_\lambda) = v'_\lambda$ , wobei  $v'_\lambda \in L(\lambda)'$  ein Erzeuger mit Gewicht  $\lambda$  sei. Da  $f$  nicht die Nullabbildung ist, muß  $J(\lambda)$  im Kern von  $f$  liegen, also induziert  $f$  einen nicht-trivialen Homomorphismus  $f: L(\lambda)' \rightarrow L(\lambda)$ , der nach dem Lemma von Schur 6.1 ein Isomorphismus sein muss.  $\square$

**Definition 11.7.** Ein Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  heißt

- (1) *ganz*, wenn  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$  für alle  $\alpha \in R$ .
- (2) *dominant*, wenn für alle  $\alpha \in R^+$  mit  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$  gilt:  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

(3) Wir notieren

$$X^+ := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ für alle } \alpha \in R^+\}$$

für die Menge aller ganzen dominanten Gewichte.

**Lemma 11.8.** *Sei  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und  $\alpha \in \Pi$  eine einfache Wurzel. Gilt  $r := \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , so gibt es einen injektiven Homomorphismus*

$$\Delta(\lambda - (r + 1)\alpha) \rightarrow \Delta(\lambda).$$

*Beweis.* Sei  $v_\lambda \in \Delta(\lambda)_\lambda$  der Erzeuger von  $\Delta(\lambda)$ . Wir wählen Elemente  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , die die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\alpha] \oplus \mathfrak{g}_\alpha$  erzeugen. Nach Proposition 11.5 ist  $y_\alpha^n v_\lambda$  für jedes  $n \geq 0$  eine Basis von  $\Delta(\lambda)_{\lambda - n\alpha}$ . Also ist der von den Elementen  $y_\alpha^n v_\lambda$ ,  $n \geq 0$  aufgespannte Unterraum  $V'$  von  $\Delta(\lambda)$  ein  $\mathfrak{g}^\alpha$ -Untermodule. Da  $V'$  offenbar frei ist über der universellen Einhüllenden von  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ , ist  $V'$  isomorph zum Vermamodul für  $\mathfrak{g}^\alpha$  zum höchsten Gewicht  $\lambda|_{[\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\alpha]}$ .

Ist nun  $r := \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , so zeigen Rechnungen analog zu den Rechnungen im Beweis von Satz 2.23, daß  $x_\alpha y_\alpha^{r+1} v_\lambda = 0$ . Darüberhinaus ist  $\lambda - n\alpha + \beta$  nicht kleiner oder gleich  $\lambda$  für alle  $\beta \in R^+$ ,  $\beta \neq \alpha$ . Also gilt  $\mathfrak{g}_\beta y_\alpha^{r+1} v_\lambda = 0$  für jedes solche  $\beta$ .

Sei nun  $V$  der von  $y_\alpha^{r+1} v_\lambda$  erzeugte  $\mathfrak{g}$ -Untermodule von  $\Delta(\lambda)$ . Aus den obigen Resultaten erhalten wir, mithilfe des PBW-Theorems, daß  $V$  ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gewicht  $\lambda - (r + 1)\alpha$  ist. Nach Proposition 11.5 gibt es also einen Homomorphismus

$$f: \Delta(\lambda - (r + 1)\alpha) \rightarrow \Delta(\lambda)$$

mit  $f(v_{\lambda - (r+1)\alpha}) = y_\alpha^{r+1} v_\lambda$ .

Nun sind sowohl  $\Delta(\lambda - (r + 1)\alpha)$  als auch  $\Delta(\lambda)$  freie  $U(\mathfrak{n}^-)$ -Moduln vom Rang 1. Nach dem Beweis des PBW-Theorems ist  $U(\mathfrak{n}^-)$  ein nullteilerfreier Ring, damit ist jeder nicht triviale Homomorphismus zwischen freien Moduln vom Rang 1 injektiv.  $\square$

*Bemerkung 11.9.* Die Aussage des Lemmas gilt sogar ohne die Annahme, daß  $\alpha$  einfach ist. In diesem Fall ist der Beweis jedoch deutlich aufwändiger.

**Proposition 11.10.** *Der einfache Modul  $L(\lambda)$  ist endlich dimensional genau dann, wenn  $\lambda$  ganz und dominant ist.*

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, daß  $L(\lambda)$  endlich dimensional ist. Für jedes  $\alpha \in R^+$  zerfällt  $L(\lambda)$  als Darstellung von  $\mathfrak{g}^\alpha$  nach dem Satz von Weyl in eine direkte Summe einfacher Darstellungen. Nach Satz 2.23 muß  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$  gelten, da diese Zahl als Eigenwert der Operation von  $\alpha^\vee$  auftaucht (man beachte, daß  $\mathfrak{g}^\alpha$  isomorph zu  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  ist und daß dabei das Element  $\alpha^\vee$  dem Basiselement  $h \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  entspricht). Aus  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < 0$  würde nun, ebenfalls aus Satz 2.23 folgen, daß  $\mathfrak{g}_\alpha L(\lambda)_\lambda \neq 0$ , also daß auch  $\lambda + \alpha$  ein Gewicht von  $L(\lambda)$  ist. Das widerspricht aber der Tatsache, daß  $\lambda$  das höchste Gewicht von  $L(\lambda)$  ist. Also gilt  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  für alle  $\alpha$ , also ist  $\lambda \in X^+$ .

Wir zeigen nun die umgekehrte Richtung. Sei also  $\lambda \in X^+$  und  $v \in L(\lambda)_\lambda$  ein Erzeuger. Ist nun  $\alpha$  eine einfache Wurzel, so gilt also  $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  und mithilfe von Lemma 11.8 sehen wir, daß  $v$  einen endlich dimensional  $\mathfrak{g}^\alpha$ -Untermodule erzeugt. Nun ist die Summe aller  $\mathfrak{g}^\alpha$ -Untermodule endlicher Dimension ein  $\mathfrak{g}$ -Untermodule von  $L(\lambda)$  (Übung!). Da  $L(\lambda)$  einfach ist, muß also  $L(\lambda)$  in die direkte Summe einfacher  $\mathfrak{g}^\alpha$ -Untermodule zerfallen.

Sei  $P(\lambda)$  die Menge der Gewichte von  $L(\lambda)$ . Aus Satz 2.23 folgt, daß  $P(\lambda)$  invariant unter der Spiegelung  $s_\alpha$  ist. Da die Weylgruppe  $\mathcal{W}$  erzeugt wird von den einfachen Spiegelungen  $s_\alpha$ , muß  $P(\lambda)$  also sogar invariant sein unter der Operation der Weylgruppe. Dann ist aber  $P(\lambda)$  endlich (Übung!). Da zusätzlich jeder Gewichtsraum von  $L(\lambda)$  endliche Dimension hat, muß  $L(\lambda)$  also endlich dimensional sein.  $\square$

#### 11.4. Charaktere einfacher Moduln. Sei

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathbb{Z}e^\lambda$$

die Gruppenalgebra über der additiven Gruppe des Vektorraums  $\mathfrak{h}^*$ . Die Multiplikation ist auf den Basiselementen definiert durch

$$e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}.$$

Die partielle Ordnung  $\leq$  auf  $\mathfrak{h}^*$  erlaubt uns, die folgende *partielle Vervollständigung*

$$\widehat{\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]} := \left\{ (c_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathbb{Z}e^\lambda \left| \begin{array}{l} \text{es gibt } \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathfrak{h}^* \\ \text{mit } c_\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \leq \mu_i \\ \text{für ein } i \in \{1, \dots, n\}. \end{array} \right. \right\}$$

von  $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$  zu definieren. Offenbar ist die Multiplikation auf  $\widehat{\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]}$  noch immer wohldefiniert.

Sei  $V$  ein Gewichtsmodul mit der Eigenschaft, daß  $\mu_1, \dots, \mu_n$  existieren mit

$$V_\mu \neq 0 \Rightarrow \mu \leq \mu_i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dann können wir den *Charakter von  $V$*  definieren durch

$$\text{ch } V := \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \dim_{\mathbb{C}} V_\lambda e^\lambda \in \widehat{\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]}.$$

Aus Proposition 11.5 folgt

$$\begin{aligned} \text{ch } \Delta(\lambda) &= \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} P(\lambda - \mu) e^{\lambda - \mu} \\ &= e^\lambda \prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots) \\ &= e^\lambda \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha})^{-1}. \end{aligned}$$

Wir können eine Operation von  $\mathcal{W}$  auf  $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$  definieren durch

$$w(e^\lambda) = e^{w(\lambda)}$$

für alle  $w \in \mathcal{W}$ . Aus dem Beweis von Proposition 11.10 ergibt sich

**Lemma 11.11.** *Sei  $\lambda \in X^+$ . Dann ist  $\text{ch } L(\lambda)$  invariant unter der Operation von  $\mathcal{W}$ , d.h. es gilt  $w(\text{ch } L(\lambda)) = \text{ch } L(\lambda)$  für alle  $w \in \mathcal{W}$ .*

Zur Erinnerung: wir haben das Element  $\rho \in \mathfrak{h}^*$  definiert durch  $2\rho = \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$ .

**Definition 11.12.** Die *dot-Operation* von  $\mathcal{W}$  auf  $\mathfrak{h}^*$  ist definiert durch

$$w.\lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$$

für  $w \in \mathcal{W}$  und  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ .

Die dot-Operation ist also die zum Fixpunkt  $-\rho$  verschobene lineare Operation der Weylgruppe auf  $\mathfrak{h}^*$ .

**Satz 11.13.** Sei  $\lambda \in X^+$ .

(1) **Die Kostantsche Charakterformel.** Es ist

$$\begin{aligned} \text{ch } L(\lambda) &= \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} \text{ch } \Delta(w.\lambda) \\ &= \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{w.\lambda} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots). \end{aligned}$$

(2) **Die Weylsche Charakterformel.** Es ist

$$\text{ch } L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{w(\rho)}}.$$

**Lemma 11.14.** Sei  $\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  die Killing-Form auf  $\mathfrak{g}$ . Die Einschränkung von  $\kappa$  auf  $\mathfrak{h}$  ist invariant unter der Weylgruppe, d.h. es gilt für alle  $h, h' \in \mathfrak{h}$  und  $w \in \mathcal{W}$ :

$$\kappa(h, h') = \kappa(w(h), w(h')).$$

*Beweis.* Es ist  $\kappa(h, h') = \text{Spur}(\text{ad}(h) \circ \text{ad}(h'))$ , wobei  $\text{ad}(h)$  und  $\text{ad}(h')$  natürlich Abbildungen von  $\mathfrak{g}$  nach  $\mathfrak{g}$  sind. Nun ist  $\text{ad}(h)$  die Nullabbildung auf  $\mathfrak{h}$  und die Multiplikation mit  $\langle \alpha, h \rangle$  auf  $\mathfrak{g}_\alpha$  für jedes  $\alpha \in R$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \kappa(h, h') &= \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, h \rangle \langle \alpha, h' \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in R} \langle w^{-1}(\alpha), h \rangle \langle w^{-1}(\alpha), h' \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, w(h) \rangle \langle \alpha, w(h') \rangle \\ &= \kappa(w(h), w(h')). \end{aligned}$$

□

Zur Erinnerung: wir bezeichnen durch  $(\cdot, \cdot): \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$  die durch die Restriktion der Killing-Form von  $\mathfrak{g}$  auf  $\mathfrak{h}$  induzierte nicht ausgeartete und symmetrische Bilinearform.

**Lemma 11.15.** Der Casimir-Operator  $C$  operiert auf  $\Delta(\lambda)$  durch Multiplikation mit dem Skalar

$$c_\lambda := (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho).$$

*Proof.* Jeder  $\mathfrak{g}$ -Endomorphismus  $f: \Delta(\lambda) \rightarrow \Delta(\lambda)$  bildet den Gewichtsraum  $\Delta(\lambda)_\lambda$  auf sich ab. Da  $\Delta(\lambda)$  eindimensional ist, muß  $f$  auf  $\Delta(\lambda)$  durch Multiplikation mit einem Skalar  $c \in \mathbb{C}$  operieren. Da  $\Delta(\lambda)$  aber erzeugt wird von  $\Delta(\lambda)_\lambda$ , ist  $f$  dann automatisch das  $c$ -fache der identischen Abbildung.

Es genügt also zu zeigen, daß  $C$  durch Multiplikation mit  $c_\lambda$  auf  $\Delta(\lambda)_\lambda$  operiert. Dazu wählen wir  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$  für jedes  $\alpha \in R^+$  und definieren  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  durch  $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$ . Wir wählen zusätzlich eine Orthonormalbasis  $h_1, \dots, h_r$  von  $\mathfrak{h}$  bzgl.  $\kappa$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} C &= \sum_{\alpha \in R^+} (x_\alpha y_\alpha + y_\alpha x_\alpha) + h_1^2 + \cdots + h_r^2 \\ &= \sum_{\alpha \in R^+} (2y_\alpha x_\alpha + [x_\alpha, y_\alpha]) + h_1^2 + \cdots + h_r^2 \end{aligned}$$

Sei  $v \in \Delta(\lambda)_\lambda$ . Dann ist

$$\begin{aligned} Cv = c_\lambda v &= \left( \sum_{\alpha \in R^+} (2y_\alpha x_\alpha + [x_\alpha, y_\alpha]) + h_1^2 + \cdots + h_r^2 \right) v \\ &= \left( \sum_{\alpha \in R^+} \lambda([x_\alpha, y_\alpha]) + \lambda(h_1)^2 v + \cdots + \lambda(h_r)^2 \right) v. \end{aligned}$$

Wir können nun  $h \in \mathfrak{h}$  definieren durch  $\kappa(h, \cdot) = \lambda(\cdot)$ . Somit ist

$$\begin{aligned} c_\lambda &= \sum_{\alpha \in R^+} \kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) + \kappa(h, h_1)^2 + \cdots + \kappa(h, h_r)^2 \\ &= \sum_{\alpha \in R^+} \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) + \kappa(h, h) \\ &= \sum_{\alpha \in R^+} \alpha(h) + \kappa(h, h) \\ &= 2\rho(h) + (\lambda, \lambda) \\ &= (2\rho, \lambda) + (\lambda, \lambda) \\ &= (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho). \end{aligned}$$

□

**Lemma 11.16.** Sei  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Dann gibt es eine endliche Jordan-Hölder Reihe für  $\Delta(\lambda)$ , genauer sogar eine Filtrierung

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = \Delta(\lambda),$$

so daß für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt  $M_i/M_{i-1} \cong L(\lambda_i)$  für gewisse  $\lambda_i$  mit  $\lambda_i \leq \lambda$  und  $(\lambda_i + \rho, \lambda_i + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$ . Die Multiplizität

$$[\Delta(\lambda) : L(\mu)] := \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \mu = \lambda_i\}$$

hängt nicht von der gewählten Auflösung ab.

*Proof.* Zunächst besitzt jeder Untermodul  $M$  von  $\Delta(\lambda)$  einen einfachen Subquotienten. Denn  $M$  ist ein Gewichtsmodul, dessen Gewichte kleiner oder gleich  $\lambda$  sind. Dann existiert also auch ein maximales Gewicht in  $M$ , also enthält  $M$  einen Höchstgewichtsmodul. Jeder Höchstgewichtsmodul besitzt aber einen einfachen Quotienten nach Proposition 11.5 und Satz 11.6.

Jeder einfache Subquotient  $L$  von  $\Delta(\lambda)$  ist ein Höchstgewichtsmodul und besitzt ein maximales Gewicht. Dann muß  $L$  aber isomorph sein zu  $L(\mu)$  für ein  $\mu \in \mathfrak{h}^*$ .

Nach Lemma 11.15 können nur  $L(\mu)$  mit  $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$  als Subquotienten von  $\Delta(\lambda)$  auftauchen. Da zusätzlich  $\mu \in \lambda - \mathbb{Z}R^+$  gelten muss, kommen nur endlich viele  $\mu$  in Frage (Schnitt einer kompakten Menge mit einem Gitter). Jedes  $L(\mu)$  kann aber auch nur endlich oft vorkommen, da  $\Delta(\lambda)_\mu$  von endlicher Dimension ist. Damit haben wir die Existenz einer endlichen Jordan-Hölder Reihe gezeigt.

Wir zeigen nun die Wohldefiniertheit der Multiplizität. Für die Charaktere gilt

$$\text{ch } \Delta(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} a_\mu^\lambda \text{ch } L(\mu)$$

für gewisse  $a_\mu^\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Da alle Gewichte von  $L(\mu)$  kleiner oder gleich  $\mu$  sind, sind die  $a_\mu^\lambda$  eindeutig bestimmt.  $\square$

*Beweis der Kostantschen Charakterformel.* Sei zunächst  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  beliebig. Nach dem vorherigen Lemma können wir

$$\text{ch } \Delta(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} a_\mu^\lambda \text{ch } L(\mu)$$

schreiben für gewisse  $a_\mu^\lambda$  mit  $a_\mu^\lambda = 0$  falls  $\mu \not\leq \lambda$  oder  $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) \neq (\mu + \rho, \mu + \rho)$ . Wegen  $a_\nu^\nu = 1$  gilt und da sich jede ganzzahlige Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen ganzzahlig invertieren läßt, gibt es auch eine Gleichung

$$\text{ch } L(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} b_\mu^\lambda \Delta(\mu) \quad (*)$$

mit gewissen  $b_\mu^\lambda \in \mathbb{Z}$  und  $b_\mu^\lambda = 0$  falls  $\mu \not\leq \lambda$  oder  $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) \neq (\mu + \rho, \mu + \rho)$ .

Nun ist

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) &= \prod_{\alpha \in R^+} e^{\alpha/2} (1 - e^{-\alpha}) \\ &= e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Sei nun  $\lambda \in X^+$ . Multiplizieren wir Gleichung (\*) mit obiger Identität Element, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \right) \text{ch } L(\lambda) &= e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} b_\mu^\lambda \text{ch } \Delta(\mu) \\ &= e^\rho \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} b_\mu^\lambda e^\mu \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots) \\ &= \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} b_\mu^\lambda e^{\mu + \rho}. \end{aligned}$$

Wenden wir nun eine einfache Spiegelung  $s_\alpha$  auf diese Identität an, so wechselt die linke Seite ihr Vorzeichen, da  $\text{ch } L(\lambda)$  nach Lemma 11.11 invariant ist. Dann ist also

$$b_{\mu - \rho}^\lambda = (-1)^{l(w)} b_{w(\mu) - \rho}^\lambda.$$

Damit ist

$$b_{\mu - \rho}^\lambda = 0,$$

falls nicht  $(\mu, \mu) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$  und  $w(\mu) - \rho \leq \lambda$  für alle  $w \in \mathcal{W}$  gilt. Das anschließende Lemma liefert  $\mu \in \mathcal{W}(\lambda + \rho)$  und damit

$$b_{\mu - \rho}^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu - \rho \notin \mathcal{W}(\lambda + \rho), \\ (-1)^{l(w)}, & \text{falls } \mu = w(\lambda + \rho) \text{ für ein } w \in \mathcal{W}. \end{cases}$$

Also ist

$$\text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} \Delta(w.\lambda).$$

$\square$

**Lemma 11.17.** Ist  $\nu \in X$  und gilt  $(\nu, \nu) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$  und  $w\nu \leq \lambda + \rho$  für alle  $w \in \mathcal{W}$ , dann ist  $\nu \in \mathcal{W}(\lambda + \rho)$ .

*Beweis.* Wir finden ein  $w \in \mathcal{W}$  mit  $w(\nu) \in X^+$ , wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\nu$  in  $X^+$  liegt. Dann gilt  $(\nu, \alpha) \geq 0$  für alle  $\alpha \in R^+$ , also schliessen  $\nu$  und  $\lambda + \rho - \nu$  einen spitzen Winkel ein. Damit folgt aus  $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) = (\nu, \nu)$  schon  $\nu = \lambda + \rho$ .  $\square$

*Beweis der Weylschen Charakterformel.* Aus dem Beweis der Kostantschen Charakterformel erhalten wir

$$\left( \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \right) \text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda + \rho)}.$$

Für  $\lambda = 0$  erhalten wir

$$\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{w(\rho)}.$$

Teilen wir die erste Gleichung durch die zweite, so erhalten wir

$$\text{ch } L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{w(\rho)}}.$$

$\square$