Zentren deformierter Darstellungskategorien und Verschiebungsfunktoren

Peter Fiebig

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematischen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität
Freiburg im Breisgau

März 2001

Dekan der mathematischen Fakultät:

Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Erster Referent:

Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Zweiter Referent:

N.N.

Datum der Promotion :

Meinen Eltern

Danke!

Ich danke sehr herzlich Wolfgang Soergel für die vielen Türen, die er mir öffnete und für seine stets freundliche und immer inspirierende Betreuung. Desweiteren danke ich sehr herzlich den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Darstellungstheorie in Freiburg, allen voran Catharina Stroppel, Martin Härterich, Oleksandr Khomenko, Claus Mokler und Steen Ryom-Hansen nicht nur für die wissenschaftliche Unterstützung. Ich danke ebenfalls der Studienstiftung des deutschen Volkes für die Finanzierung meiner Promotion sowie dem Fields Institute for Mathematical Research in Toronto, wo Teile dieser Arbeit entstanden, für seine Gastfreundschaft. Ohne die finanzielle Hilfe des TMR-Programms "Algebraic Lie Representations" wären einige Auslandsaufenthalte nicht machbar gewesen, auch dafür bin ich dankbar.

ZENTREN DEFORMIERTER DARSTELLUNGSKATEGORIEN UND VERSCHIEBUNGSFUNKTOREN

PETER FIEBIG

Zusammenfassung. We define a deformed version of the classical category $\mathcal{O}$ over symmetrizable Kac–Moody Algebras and examine the projective objects therein. We prove a version of the classical BGG-reciprocity theorem. Localization techniques allow to calculate the center of all blocks outside the critical hyperplane. We also define a deformed version of translation functors in both directions and prove an adjointness property.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Sei $\mathfrak{g}$ eine symmetrisierbare Kac–Moody-Algebra. Wir betrachten in dieser Arbeit eine deformierte Version der klassischen Kategorie $\mathcal{O}$. Sei dazu T eine unitäre, assoziative und kommutative Algebra über der universellen Einhüllenden der Cartanschen Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$. Die deformierte Kategorie $\mathcal{O}_T$ ist dann eine Unterkategorie der Kategorie aller Moduln über der Lie-Algebra $\mathfrak{g} \otimes T$, auf deren Objekten die Borelsche in geeigneter Weise endlich operiert und die Operationen von $\mathfrak{h}$ und T verträglich sind. Wie im klassischen Fall sind die wichtigsten Objekte die deformierten Verma-Moduln, die parametrisiert werden durch ihre höchsten Gewichte. Wir beweisen, daß es genügend projektive Objekte in $\mathcal{O}_T$ gibt, falls wir die Gewichte der Moduln nach oben beschränken. Ist T eine komplette lokale Algebra, dann existieren projektive Decken aller einfachen Objekte in diesen Kategorien, die eine endliche Filtrierung durch Verma-Moduln erlauben, und die Multiplizität der Verma-Quotienten wird durch eine Variante der BGG-Reziprozität gegeben. Hieraus folgt durch klassische Argumente eine Formel für die Zerlegung von $\mathcal{O}_T$ in unzerlegbare Unterkategorien, die sogenannten Blöcke. Für jeden Morphismus $T \to T'$ existiert ein Basiswechselfunktor $\cdot \otimes_T T' \colon \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_{T'}$, der Projektivität erhält, jedoch zerfällt ein unzerlegbarer Block im Allgemeinen nach Basiswechsel in kleinere Blöcke. Für ein endlich erzeugtes projektives Objekt P aus $\mathcal{O}_T$ ist die natürliche Transformation

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(P, \cdot) \otimes_T T' \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T'}}(P \otimes_T T', \cdot)$$

ein Isomorphismus.

Für geeignete Deformationsringe werden analog zum klassischen Fall die Verma-Moduln eines Blocks ausserhalb der kritischen Hyperebene parametrisiert durch einen Orbit einer Untergruppe der Weylgruppe auf dem Dualraum der Cartanschen Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Eine noch offene Vermutung besagt, daß die kategorielle Struktur eines Blocks nur von der Isomorphieklasse dieser Untergruppe und der Singularität des Orbits, also dem Stabilisator eines Punkts, abhängt.

Ein erster Schritt zur Berechnung der Struktur der Blöcke ist die Berechnung des Zentrums, also des Endomorphismenrings des Identitätsfunktors. Ausserhalb der kritischen Hyperebene und ausgehend von einer universellen Deformation, nämlich bzgl. einer Komplettierung der universellen Einhüllenden der Cartanschen Unteralgebra, können wir durch Lokalisierung die Blöcke so weit reduzieren, daß die zugehörige Gruppe und die zugehörigen Orbiten aus höchstens noch zwei Elementen bestehen. Die Struktur dieser Blöcke ist dann entweder die eines deformierten Blocks über einer abelschen Lie-Algebra, falls der Orbit aus einem Element besteht, oder des deformierten Hauptblocks von $\mathfrak{sl}_2$. Beide Fälle sind explizit berechenbar und erlauben die Bestimmung des Zentrums im universell deformierten Fall für jeden Block ausserhalb der kritischen Hyperebene.

Im zweiten Teil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Deformation der Verschiebungsfunktoren zwischen verschiedenen Blöcken der Darstellungskategorie. Wir definieren diese Funktoren analog zum nicht-deformierten Fall, wo sie vor allem von Wayne Neidhardt in [Nei] untersucht wurden, jedoch schränken wir uns ein auf Moduln aus $\mathcal{O}_T$ mit Verma-Fahne. Da die Definition des Verschiebungsfunktors in die antidominante Richtung ein Tensorprodukt mit einem Modul mit niedrigstem Gewicht beinhaltet und dieses Produkt nicht mehr in $\mathcal{O}_T$ liegt, können wir nicht die Ergebnisse über die Blockzerlegung zur Definition benutzen. Das führt uns dazu, Moduln mit einer sogenannten umgekehrten Verma-Fahne zu betrachten. Den verschobenen Modul finden wir dann als gewissen maximalen Subquotienten eines Moduls mit umgekehrter Verma-Fahne.

Der Verschiebungsfunktor in die dominante Richtung ist rechts- und linksadjungiert zum Verschiebungsfunktor in die antidominante Richtung. Die Rechtsadjungiertheit hat schon Wayne Neidhardt in [Nei] gezeigt. In dieser Arbeit beweisen wir noch die Linksadjungiertheit. Der Beweis der Linksadjungiertheit benützt ganz entscheidend Eigenschaften des Basiswechselfunktors auf den deformierten Kategorien. Auch hier können wir das Problem auf den berechenbaren $\mathfrak{sl}_2$-Fall zurückführen. Obwohl wir uns auf die Unterkategorie aller Moduln mit Verma-Fahne beschränkt haben, reicht die Adjungiertheit aus, um zu zeigen, daß verschobene projektive Objekte projektiv bleiben. Mittels Verschiebung lassen sich so projektive Decken in $\mathcal{O}_T$ konstruieren. Das eröffnet einen kombinatorischen Weg zur Berechnung der Homomorphismenräume projektiver Decken und zur Bestimmung der kategoriellen Struktur der Blöcke. Das ist jedoch einer weiteren Arbeit vorbehalten.

2. Deformierte Darstellungskategorien

Sei $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$ eine symmetrisierbare Kac–Moody-Algebra über $\mathbb{C}$ mit Borelscher und Cartanscher Unteralgebra und $U = U(\mathfrak{g}) \supset B = U(\mathfrak{b}) \supset S = U(\mathfrak{h})$ die universellen Einhüllenden. Seien $\Pi \subset \Delta_+ \subset \Delta \subset \mathfrak{h}^\star$ die einfachen bzw. positiven Wurzeln im Dualraum der Cartanschen.

Die Kategorie $\mathcal{O}$ besteht aus allen U-Moduln, die halbeinfach unter S und lokal endlich unter B sind. Sei $B \to S$ linksinvers zur Inklusion $S \to B$. Jedes $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ definiert unter dieser Abbildung den eindimensionalen B-Modul $\mathbb{C}_\lambda$. Der Verma-Modul

$$\Delta(\lambda) := U \otimes_B \mathbb{C}_\lambda$$

liegt in $\mathcal{O}$ und hat genau einen einfachen Quotienten $L(\lambda)$. $\{L(\lambda)\}_{\lambda \in \mathfrak{h}^\star}$ ist ein Repräsentantensystem für die einfachen Objekte in $\mathcal{O}$.

Wir definieren nun eine relative Version der Kategorie $\mathcal{O}$. Sei T eine kommutative, assoziative und unitäre S-Algebra mit Strukturmorphismus $\tau : S \to T$. Wir definieren nun die Kategorie $\mathcal{O}_T$ nach dem Vorbild $\mathcal{O}$ als gewisse Unterkategorie der Kategorie aller U–T-Bimoduln. Da T

kommutativ ist, können wir die Operation von T als zusätzliche Linksoperation auffassen. Für einen U–T-Bimodul M und $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ sei

$$M_\lambda = \{\, m \in M \mid h.m = (\lambda + \tau)(h)m \;\forall h \in \mathfrak{h}\}$$

der $\mathfrak{h}$-Eigenraum zum Gewicht $\lambda + \tau$. M_λ ist ein T-Untermodul.

Definition 2.1. Sei $\mathcal{O}_T$ die Kategorie aller U–T-Bimoduln M, so daß M die direkte Summe seiner Gewichtsräume M_λ ist und so daß für alle Elemente $m \in M$ der T-Modul $B.T.m$ endlich erzeugt ist.

Man macht sich leicht klar, daß $\mathcal{O}_T$ eine abelsche Kategorie ist. Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$. Mittels

$$B \to S \xrightarrow{\lambda+\tau} T$$

wird T zu einem B–T-Bimodul T_λ. Durch Induktion erhalten wir

$$\Delta_T(\lambda) := U \otimes_B T_\lambda,$$

den (deformierten) Verma-Modul zum Parameter λ. Er liegt in $\mathcal{O}_T$.

Bemerkung 2.2. Ist $\mu \in \mathfrak{h}^\star$, so definiert $S \xrightarrow{\mu} \mathbb{C}$ eine S-Algebren Struktur auf $\mathbb{C}$ und es ist $\mathcal{O}_\mathbb{C} \cong \mathcal{O}$ und $\Delta_\mathbb{C}(\lambda) \cong \Delta(\lambda + \mu)$.

Jeder Morphismus $f : T \to T'$ von S-Algebren induziert einen Funktor

$$\mathrm{Ind} = \mathrm{Ind}_f = \cdot \otimes_T T' : \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_{T'}$$

mit der Eigenschaft $\mathrm{Ind}(\Delta_T(\lambda)) \cong \Delta_{T'}(\lambda)$.

Wir können auch den adjungierten Funktor

$$\mathrm{Res} = \mathrm{Res}_f : \mathcal{O}_{T'} \to \mathcal{O}_T$$

definieren, indem wir $\mathrm{Res}(M) \cong_\mathbb{C} M$ als U–T-Bimodul auffassen.

Bemerkung 2.3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit der Struktur einer S-Algebra. Dann ist die Kategorie $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ ein direkter Summand der gewöhnlichen Kategorie $\mathcal{O}$ über der Lie-Algebra $\mathfrak{g}_\mathbb{K} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \mathbb{K}$ und besteht aus denjenigen Moduln, deren Gewichte im affinen Raum $\tau + \mathfrak{h}^\star \subset \mathfrak{h}^\star_\mathbb{K} = \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathfrak{h} \otimes_\mathbb{C} \mathbb{K}, \mathbb{K}) = \mathfrak{h}^\star \otimes_\mathbb{C} \mathbb{K}$ liegen. $\Delta_\mathbb{K}(\lambda)$ hat genau einen einfachen Quotienten $L_\mathbb{K}(\lambda)$ und die $L_\mathbb{K}(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ bilden ein Repräsentantensystem für die einfache Objekte aus $\mathcal{O}_\mathbb{K}$.

Lemma 2.4. *Ist T eine lokale S-Algebra mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subset T$ und $\pi : T \to \mathbb{K}_T := T/\mathfrak{m}$ der kanonische Morphismus, so definieren* Ind_π *und* Res_π *eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{matrix} \textit{einfache Isomorphieklassen} \\ \textit{in } \mathcal{O}_T \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \textit{einfache Isomorphieklassen} \\ \textit{in } \mathcal{O}_{\mathbb{K}_T} \end{matrix} \right\}$$

Beweis. Ist L einfach in $\mathcal{O}_T$, so ist jeder Gewichtsraum L_λ endlich erzeugt über T. Nach dem Lemma von Nakayama faktorisiert die Operation von T über $T/\mathfrak{m}$. Folglich ist $\mathrm{Ind}(L) = L \otimes_T T/\mathfrak{m} = L \otimes_T \mathbb{K}_T$ einfach in $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_T}$. Umgekehrt ist $\mathrm{Res}(L')$ einfach in $\mathcal{O}_T$ für jeden einfachen Modul L' aus $\mathcal{O}_{T/\mathfrak{m}}$. Wegen $\mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(L')) \cong L'$ und $\mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(L)) \cong L$ folgt die Behauptung. □

Korollar 2.5. *Ist T lokal, so werden die einfachen Objekte in $\mathcal{O}_T$ parametrisiert durch $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$.*

Wir definieren $L_T(\mu) := \mathrm{Res}(L_{\mathbb{K}_T}(\mu))$.

3. Deformierte projektive Objekte und Blöcke

Sei T eine beliebige S-Algebra. Im Allgemeinen existieren in $\mathcal{O}_T$ nicht genügend projektive Objekte. Wir müssen deshalb zu gestutzen Kategorien übergehen.

Definition 3.1. Für $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\star$ sei $\mu \leq \lambda$, falls $\lambda - \mu \in \mathbb{N}\Delta_+$. Die Kategorie $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ bestehe aus allen Moduln M aus $\mathcal{O}_T$ für die gilt

$$M_\mu \neq 0 \Rightarrow \mu \leq \lambda.$$

Im Folgenden zeigen wir, daß in den Kategorien $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ genügend projektive Objekte existieren. Dann zeigen wir die Existenz projektiver Decken und beweisen, daß diese projektiven Decken eine Verma-Fahne besitzen. Für komplette lokale S-Algebren können wir auch die zugehörigen Multiplizitäten berechnen. Die folgende Konstruktion projektiver Objekte findet sich für den nicht-deformierten Fall in [RCW] und [Soe].

Für $\nu \in \mathfrak{h}^\star$ ist $B^{\nleqslant\nu} := \bigoplus_{\gamma \nleqslant \nu} B_\gamma$ ein B-Untermodul von B und wir definieren

$$B^{\leqslant\nu} := B/B^{\nleqslant\nu}.$$

Für $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\star$ mit $\mu \leq \lambda$ sei

$$Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu) := U \otimes_B (B^{\leqslant\lambda-\mu} \otimes_S T_\mu).$$

$Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ ist ein Modul aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$.

Definition 3.2. Sei M ein U–T-Bimodul. Eine Verma-Fahne von M ist eine endliche Filtrierung von M, deren Subquotienten isomorph zu Verma-Moduln sind. Mit $(M : \Delta_T(\kappa))$ bezeichnen wir die Multiplizität von $\Delta_T(\kappa)$ als Subquotient in dieser Verma-Fahne. Diese Multiplizität hängt nicht von der Wahl der Verma-Fahne ab.

Proposition 3.3. *Sei T eine S-Algebra und $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\star$ mit $\mu \leq \lambda$. Dann ist $Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ ein projektives Objekt in $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ mit Quotienten $\Delta_T(\mu)$ und besitzt eine Verma-Fahne.*

Beweis. Sei M ein Modul aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}}(Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu), M) &= \operatorname{Hom}_{U\text{–}T}(U \otimes_B (B^{\leqslant\lambda-\mu} \otimes_S T_\mu), M) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{B\text{–}T}(B^{\leqslant\lambda-\mu} \otimes_S T_\mu, M) \\ &\cong M_\mu.\end{aligned}$$

Diese Isomorphismen definieren eine natürliche Äquivalenz von Funktoren $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}}(Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu), \cdot) \cong \cdot_\mu$, also ist $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}}(Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu), \cdot)\colon \mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda} \to \mathbb{C}$–mod ein exakter Funktor und folglich $Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ projektiv.

$B^{\leqslant\lambda-\mu}$ besitzt eine Filtrierung

$$0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n = B^{\leqslant\lambda-\mu}$$

durch B-Moduln S_ν. Der letzte Quotient ist S_0. Dann ist

$$0 = B_0 \otimes_S T_\mu \subset B_1 \otimes_S T_\mu \subset \cdots \subset B_n \otimes_S T_\mu = B^{\leqslant\lambda-\mu} \otimes_S T_\mu$$

eine Filtrierung durch B–T-Bimoduln $T_{\nu+\mu}$. Anwenden des exakten Funktors $U \otimes_B \cdot$ liefert eine Filtrierung

$$0 = U \otimes_B (B_0 \otimes T_\mu) \subset U \otimes_B (B_1 \otimes T_\mu) \subset \cdots \subset U \otimes_B (B_n \otimes T_\mu) = Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$$

durch Verma-Moduln $\Delta_T(\mu+\nu)$. Der letzte Quotient ist $\Delta_T(\mu)$. □

Proposition 3.4. *Sei P ein projektives Objekt in $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ und $T \to T'$ ein Morphismus von S-Algebren. Dann ist auch $P \otimes_T T'$ projektiv in $\mathcal{O}_{T'}^{\leqslant\lambda}$. Ist P endlich erzeugt, so ist die natürliche Abbildung*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_T}(P, M) \otimes_T T' \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{T'}}(P \otimes_T T', M \otimes_T T')$$

ein Isomorphismus für alle M aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$.

Beweis. Wird ein Modul M aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ erzeugt von einem Gewichtsvektor $m \in M_\mu$, so existiert eine Surjektion $Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu) \twoheadrightarrow M$ nach dem Beweis von Proposition 3.3. Also ist jeder Modul aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ ein Quotient eines Moduls der Form $\bigoplus Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$, jedes projektive Objekt P aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ ist also direkter Summand eines solchen Moduls. Dann ist $P \otimes_T T'$ aber direkter Summand von $\bigoplus Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu) \otimes_T T' = \bigoplus Q_{T'}^{\leqslant\lambda}(\mu)$, also projektiv.

Ist P endlich erzeugt, so ist P direkter Summand einer endlichen Summe $\bigoplus_\mu Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$. Es genügt also, den zweiten Teil der Proposition für $P = Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ für ein $\mu \leq \lambda$ zu zeigen. Es ist dann $P \otimes_T T' = Q_{T'}^{\leqslant\lambda}(\mu)$. Wie schon im Beweis der Proposition 3.3 sehen wir, daß die linke Seite dann natürlich isomorph zu $M_\mu \otimes_T T'$ ist und die rechte Seite zu $(M \otimes_T T')_\mu$. Die natürliche Abbildung $M_\mu \otimes_T T' \to (M \otimes_T T')_\mu$ ist aber ein Isomorphismus. □

Sei $\mu \leq \lambda$. $L_T(\mu)$ ist nach Proposition 3.3 ein Quotient von $Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$.

Definition 3.5. Sei $P_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ ein unzerlegbarer direkter Summand von $Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ mit Quotienten $L_T(\mu)$.

Wir sehen gleich (Proposition 3.8), daß $P_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, wenn T eine lokale komplette S-Algebra ist.

Lemma 3.6. *Sei T eine lokale S-Algebra. Jeder direkte Summand eines Moduls mit Verma-Fahne hat eine Verma-Fahne.*

Beweis (vgl. [MoP]*).* Sei M ein Modul mit Verma-Fahne und $M = P \oplus Q$ eine direkte Zerlegung. Wir beweisen das Lemma durch Induktion über die Länge l einer Verma-Fahne von M. Der Induktionsanfang ist klar, da Verma-Moduln unzerlegbar sind. Sei nun $l > 1$ und μ ein maximales Gewicht von M und OBdA $P_\mu \neq 0$. Sei $\mathfrak{m} \subset T$ das maximale Ideal und $m \in P_\mu, m \notin \mathfrak{m}P_\mu$. Ein solches m existiert nach dem Lemma von Nakayama. Sei M' das Erzeugnis als U–T-Bimodul von m. Ich behaupte, daß dann $M' = \Delta_T(\mu)$ und daß $M/M' = P/M' \oplus Q$ eine Verma-Fahne mit Länge $l-1$ hat, woraus dann die Behauptung folgt.

Wir müssen nun also zeigen, daß für einen Modul M mit einer Verma-Fahne der Länge l, einem maximalen Gewicht μ von M und einem Element $m \in M_\mu, m \notin \mathfrak{m}M_\mu$ der Modul $M' = U.T.m$ isomorph ist zu $\Delta_T(\mu)$ und M/M' eine Verma-Fahne der Länge $l-1$ hat. Das geschieht per Induktion nach l. Für $l = 1$ beachten wir, daß ein Verma-Modul $\Delta_T(\lambda)$ von jedem Vektor $m \in \Delta_T(\lambda)_\lambda, m \notin \mathfrak{m}\Delta_T(\lambda)$ erzeugt wird. Für $l > 1$ sei

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_l = 0$$

eine Verma-Fahne der Länge l. Ist $m \in M_1$, so können wir die Induktionsbehauptung auf M_1 anwenden und sind fertig.

Sei also $m \notin M_1$. Wir betrachten den kanonischen Morphismus $M' \to M/M_1$. Wegen der Maximalität von μ ist $M/M_1 \cong \Delta_T(\mu)$. Wegen $m \notin \mathfrak{m}M$ erzeugt das Bild von M' den Modul M/M_1. Somit ist obige Abbildung surjektiv. Injektivität folgt aus der Tatsache, daß es wegen der Maximalität von μ und der universellen Eigenschaft von Verma-Moduln eine links-inverse Abbildung $M/M_1 \to M'$ gibt. Folglich ist $M' \cong \Delta_T(\mu)$.

Die kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M \to M/M_1 \to 0$$

spaltet wegen der Maximalität von μ, also $M = M_1 \oplus M/M_1$ und M/M' ist isomorph zu M_1 und M_1 hat eine Verma-Fahne der Länge $l-1$. $\square$

Sei T eine S-Algebra und $\mathfrak{p} \subset T$ ein Ideal. Mithilfe der Projektion $T \to T/\mathfrak{p}$ können wir jeden Modul aus $\mathcal{O}_{T/\mathfrak{p}}$ als Modul in $\mathcal{O}_T$ betrachten.

Das nächste Lemma brauchen wir, um zu zeigen, daß eine projektive Decke auch beim Spezialisieren eine projektive Decke, also unzerlegbar, bleibt.

Lemma 3.7. *Sei T eine komplette lokale S-Algebra mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $\mathbb{K}_T = T/\mathfrak{m}$. Ist $P \in \mathcal{O}_T$ ein endlich erzeugtes unzerlegbares projektives Objekt, so ist auch $P \otimes_T \mathbb{K}_T$ unzerlegbar in $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_T}$. Analoges gilt für die Kategorien $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_T}^{\leqslant\lambda}$.*

Beweis. Angenommen, wir hätten eine Zerlegung $P \otimes_T \mathbb{K}_T = R \oplus R'$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_T}$. Mithilfe des Idempotent Lifting Lemmas (vgl. [Ben], Theorem 1. 7. 3) und des Isomorphismus aus Proposition 3.4

$$\operatorname{End}(P \otimes_T T/\mathfrak{m}^n) \otimes_{T/\mathfrak{m}^n} T/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(P \otimes T/\mathfrak{m}^m)$$

für $m < n$ können wir diese Zerlegung sukzessive in

$$\cdots \to P \otimes_T T/\mathfrak{m}^n \to \cdots \to P \otimes_T T/\mathfrak{m}^2 \to P \otimes_T T/\mathfrak{m} = P \otimes_T \mathbb{K}_T$$

zu

$$\cdots \to R_n \oplus R'_n \to \cdots \to R_2 \oplus R'_2 \to R \oplus R'$$

liften und erhalten $\varprojlim P \otimes T/\mathfrak{m}^n = \varprojlim R_n \oplus \varprojlim R'_n$. Da jeder Morphismus die Gewichtsraumzerlegung erhält, zerfällt das direkte System der $P \otimes T/\mathfrak{m}^n$ in

$$P_\lambda/\mathfrak{m}^m P_\lambda \to P_\lambda/\mathfrak{m}^n P_\lambda.$$

Für ein endlich erzeugtes Objekt sind nun die Gewichtsräume endlich erzeugte T-Moduln und für eine komplette Algebra T und endlich erzeugte T-Moduln N ist $N \to \varprojlim N/\mathfrak{m}^n N$ ein Isomorphismus, also ist

$$P \cong \varprojlim P \otimes T/\mathfrak{m}^n = \varprojlim R_n \oplus \varprojlim R'_n.$$

Somit erhalten wir eine Zerlegung von P, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Der nächste Satz beweist die Existenz projektiver Decken in gestutzen Kategorien und verallgemeinert die BGG-Reziprozität über die Multiplizitäten in einer Verma-Fahne.

Theorem 3.8. *Sei T eine komplette lokale S-Algebra und $\mathbb{K}_T = T/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper. Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\star$ und $\mu \leq \lambda$. Dann ist $P_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ eine projektive Decke von $L_T(\mu)$ in $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ und besitzt eine Verma-Fahne. Für die Multiplizitäten in dieser Verma-Fahne gilt die BGG-Reziprozität*

$$\left(P_T^{\leqslant\lambda}(\mu) : \Delta_T(\nu)\right) = \left(P_{\mathbb{K}_T}^{\leqslant\lambda}(\mu) : \Delta_{\mathbb{K}_T}(\nu)\right) = \left[\Delta_{\mathbb{K}_T}(\nu) : L_{\mathbb{K}_T}(\mu)\right]$$

für alle $\nu \leq \lambda$.

Beweis (vgl. [Soe]*).* Wir kürzen $P = P_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ und $L = L_T(\mu)$ ab. P ist als direkter Summand eines projektiven Moduls projektiv. Sei $\pi : P \to L$ eine Surjektion und $i : U \to P$ ein Morphismus mit $\pi \circ i \neq 0$. Wir müssen zeigen, daß i surjektiv ist. Nun faktorisiert $\pi \circ i$ über die Projektion $\mathrm{can} : P \to P/\mathfrak{m}P$ wegen $\mathfrak{m}L = 0$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] & P \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "can"'] & & L \\ & & P/\mathfrak{m}P \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Nach Lemma 3.7 ist $P/\mathfrak{m}P$ ein unzerlegbares projektives Objekt. Nach [Soe] ist $P/\mathfrak{m}P$ also eine projektive Decke des einfachen Moduls L, folglich ist $\mathrm{can} \circ i$ surjektiv. Nach dem Lemma von Nakayama ist i surjektiv.

Nach Lemma 3.6 hat P eine Verma-Fahne. Ist

$$0 = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P$$

eine Verma-Fahne von P mit Subquotienten $\Delta_T(\mu_i)$, so ist

$$0 = P_0 \otimes_T \mathbb{K}_T \subset P_1 \otimes_T \mathbb{K}_T \subset \cdots \subset P_n \otimes_T \mathbb{K}_T = P \otimes_T \mathbb{K}_T$$

eine Verma-Fahne von $P \otimes_T \mathbb{K}_T$ mit Subquotienten $\Delta_{\mathbb{K}_T}(\mu_i)$. Hieraus folgt die Formel

$$\left(P_T^{\leqslant\lambda}(\mu) : \Delta_T(\nu)\right) = \left(P_{\mathbb{K}_T}^{\leqslant\lambda}(\mu) : \Delta_{\mathbb{K}_T}(\nu)\right).$$

Die zweite Formel ist die BGG-Reziprozität ([Soe]). □

Als nächstes verallgemeinern wir die Blockzerlegung aus [DGK] und [Soe].

Definition 3.9. Für eine komplette lokale S-Algebra T sei $\sim_T$ die von $\lambda \sim_T \mu$, falls $[\Delta_{\mathbb{K}_T}(\lambda) : L_{\mathbb{K}_T}(\mu)] > 0$ erzeugte Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{h}^\star$.

Definition 3.10. Für eine Vereinigung von Äquivalenzklassen $\theta \subset \mathfrak{h}^\star/\sim_T$ sei $\mathcal{O}_{T,\theta}$ die Kategorie aller Moduln M aus $\mathcal{O}_T$, deren einfache Subquotienten von der Form $L_T(\mu)$ für $\mu \in \theta$ sind. Sei $\mathcal{O}_{T,\theta}^{\leqslant\lambda}$ die entsprechende Unterkategorie von $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$.

Theorem 3.11. *Sei T eine komplette lokale S-Algebra mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $\mathbb{K}_T = T/\mathfrak{m}$. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \prod_{\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/\sim_T} \mathcal{O}_{T,\Lambda} & \to & \mathcal{O}_T \\ \{M_\Lambda\} & \mapsto & \bigoplus M_\Lambda \end{array}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. (vgl.[Soe]) Für jeden Modul N aus $\mathcal{O}_T$ und $\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/\sim_T$ sei N_Λ das Erzeugnis der Bilder aller Morphismen $P_T^{\leqslant\lambda}(\mu) \to N$ für $\mu \in \Lambda$ und $\lambda \geq \mu$. Man zeigt leicht, daß $N \mapsto \{N_\Lambda\}$ invers ist zu obigem Funktor. □

Proposition 3.12. *Sei $T \to T'$ ein Morphismus kompletter lokaler S-Algebren. Aus $\mu \sim_{T'} \nu$ für $\mu, \nu \in \mathfrak{h}^\star$ folgt $\mu \sim_T \nu$.*

Beweis. $P_T^{\leqslant\lambda}(\mu) \otimes_T T'$ ist nach Lemma 3.4 projektiv und besitzt $\Delta_{T'}(\mu)$ als Quotienten. Außerdem gilt für die Multiplizitäten

$$\left(P_T^{\leqslant\lambda}(\mu) : \Delta_T(\nu)\right) = \left(P_T^{\leqslant\lambda}(\mu) \otimes_T T' : \Delta_{T'}(\nu)\right).$$

Die projektive Decke $P_{T'}^{\leqslant\lambda}(\mu)$ in $\mathcal{O}_{T'}^{\leqslant\lambda}$ ist direkter Summand des Moduls $P_T^{\leqslant\lambda}(\mu) \otimes_T T'$, folglich gilt

$$\left(P_T^{\leqslant\lambda}(\mu) : \Delta_T(\nu)\right) \geq \left(P_{T'}^{\leqslant\lambda}(\mu) : \Delta_{T'}(\nu)\right)$$

und nach der BGG-Reziprozität

$$[\Delta_{\mathbb{K}_T}(\nu) : L_{\mathbb{K}_T}(\mu)] \geq \left[\Delta_{\mathbb{K}_{T'}}(\nu) : L_{\mathbb{K}_{T'}}(\mu)\right],$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 3.13. *Für jeden Morphismus $T \to T'$ von S-Algebren und jede Vereinigung von Äquivalenzklassen $\theta \subset \mathfrak{h}^\star/\sim_T$ induziert der Funktor*

$$\cdot \otimes_T T' : \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_{T'}$$

einen Funktor

$$\cdot \otimes_T T' : \mathcal{O}_{T,\theta} \to \mathcal{O}_{T',\theta}.$$

4. Deformierte Zentren

Sei T eine S-Algebra. Das Zentrum einer Kategorie ist der Ring der natürlichen Endomorphismen des Identitätsfunktors. In diesem Abschnitt stellen wir einige Aussagen über die Struktur der Zentren der deformierten Darstellungskategorien bereit und untersuchen die Verbindungen zwischen Endomorphismen von projektiven Objekten und dem Zentrum.

Definition 4.1. Sei Z_T das Zentrum von $\mathcal{O}_T$ und $Z_T^{\leqslant\lambda}$ das Zentrum von $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ für $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$.

Für $\lambda \leq \lambda'$ gibt es eine natürliche Restriktionsabbildung $Z_T^{\leqslant\lambda'} \to Z_T^{\leqslant\lambda}$, die $\{Z_T^{\leqslant\lambda}\}$ bilden also ein gerichtetes System.

Proposition 4.2. *Die natürlichen Restriktionsabbildungen* $Z_T \to Z_T^{\leqslant\lambda}$ *induzieren einen Isomorphismus*

$$Z_T \cong \varprojlim Z_T^{\leqslant\lambda}.$$

Beweis. Jeder endlich erzeugte Modul M aus $\mathcal{O}_T$ liegt schon in einer Kategorie $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ und ein Element des Zentrums ist eindeutig bestimmt durch seine Wirkung auf den endlich erzeugten Moduln. Folglich ist obige Abbildung injektiv. Andererseits setzt sich jede natürliche Transformation des Identitätsfunktors auf der Unterkategorie der endlich erzeugten Moduln aus $\mathcal{O}_T$ fort zu einem Element der Zentrums. □

Es genügt also, $Z_T^{\leqslant\lambda}$ zu berechnen. Proposition 4.4 gibt nun eine konkrete Darstellung von $Z_T^{\leqslant\lambda}$.

Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ und $\{P_\mu\}_{\mu\leq\lambda}$ ein System projektiver Objekte aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $\mu \leq \lambda$ eine Surjektion $P_\mu \twoheadrightarrow \Delta_T(\mu)$ existiert. Ein solches System existiert nach Proposition 3.3. Sei

$$\mathcal{P} := \left\{ \bigoplus_{i\in I} P_{\mu_i} \mid \mu_i \leq \lambda, I \text{ eine Indexmenge} \right\}.$$

Lemma 4.3. *Für jeden Modul* M *aus* $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ *existiert ein* $P \in \mathcal{P}$ *mit einer Surjektion* $P \twoheadrightarrow M$*.*

Beweis. Es genügt, das Lemma für Moduln M, die von einem Element $m \in M$ erzeugt werden, zu zeigen. Ein solcher Modul hat aber eine (endliche) Filtrierung durch Höchstgewichtsmoduln. Wegen der Projektivität der P_μ finden wir eine Surjektion $\bigoplus_\mu P_\mu \twoheadrightarrow M$, wobei μ die höchsten Gewichte in dieser Filtrierung durchläuft. □

Jedes Element $z \in Z_T^{\leqslant\lambda}$ definiert einen Endomorphismus $z_\mu\colon P_\mu \to P_\mu$. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_T\colon Z_T^{\leqslant\lambda} &\to \prod_{\mu\leq\lambda} \operatorname{End}(P_\mu) \\ z &\mapsto \{z_\mu\}_{\mu\leq\lambda}. \end{aligned}$$

Sei

$$B_T^{\leqslant\lambda} := \left\{ \{z_\mu\} \in \prod_{\mu\leq\lambda} \operatorname{End}(P_\mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \circ z_\mu = z_\nu \circ f \quad \forall \mu,\nu \leq \lambda, \\ f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_T}(P_\mu, P_\nu) \end{array} \right\}.$$

Proposition 4.4. ϕ_T *induziert einen Isomorphismus*

$$\phi_T\colon Z_T^{\leqslant\lambda} \xrightarrow{\sim} B_T^{\leqslant\lambda} \subset \prod_{\mu\leq\lambda} \operatorname{End}(P_\mu).$$

Bemerkung 4.5. Ist $\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/_\sim$ eine *endliche* Äquivalenzklasse, so ist $P := \bigoplus_{\mu\in\Lambda} P_\mu$ ein volltreuer projektiver Erzeuger von $\mathcal{O}_{T,\Lambda}$. Ein analog definiertes $B_{T,\Lambda}$ ist dann das Zentrum des Rings $\mathrm{End}(P)$. Wegen $\mathcal{O}_{T,\Lambda} \cong \text{mod-}\mathrm{End}(P)$ ist obiger Satz ein Spezialfall der Aussage, daß das Zentrum der Kategorie der Darstellungen über einem Ring isomorph zum Zentrum des Rings ist.

Beweis. Nach Definition des Zentrums liegt das Bild von ϕ_T sicherlich in $B_T^{\leqslant\lambda}$. Ist $\phi_T(z) = 0$, so induziert z die Nullabbildung auf allen P_μ, somit auf allen Moduln aus $\mathcal{P}$. Jeder Modul aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ ist aber Quotient eines Moduls aus $\mathcal{P}$ nach Lemma 4.3, wegen der Natürlichkeit von z operiert z also trivial auf jedem Modul, folglich ist ϕ_T injektiv. Wir müssen noch Surjektivität zeigen.

Sei $z = \{z_\mu\}$ ein Element aus $B_T^{\leqslant\lambda}$ und M ein Modul aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$. Wir wollen die Operation von z auf den Moduln P_μ fortsetzen zu einer Operation auf M. Wir können M darstellen als Kokern eines Morphismus $P' \to P$ mit Moduln $P, P' \in \mathcal{P}$. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle z}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle z} & & \\ P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M \end{array}$$

Also wird eine Abbildung $M \to M$ induziert. Da die auf den projektiven Objekten konstruierten Abbildungen kommutieren mit Morphismen zwischen diesen projektiven Objekten, ist dieser Morphismus unabhängig ist von der Wahl der Darstellung $P' \to P \twoheadrightarrow M$. Auf ähnliche Weise sieht man, daß die so definierte Operation auf den Moduln aus $\mathcal{O}_T^{\leqslant\lambda}$ mit allen Morphismen vertauscht, also eine natürliche Transformation des Identitätsfunktors liefert. Folglich liegt z im Bild von ϕ_T. $\square$

Wir fassen von nun an $Z_T^{\leqslant\lambda}$ als Unterring in $\prod_{\mu\leq\lambda} \mathrm{End}(P_\mu)$ auf. Ist $T \to T'$ ein Morphismus von S-Algebren, so ist $P'_\mu = P_\mu \otimes_T T'$ ein projektives Objekt nach Lemma 3.4 mit $\Delta_{T'}(\mu)$ als Quotienten. Wir können annehmen, daß jeder Modul P_μ endlich erzeugt ist (beispielsweise ist jedes $Q_T^{\leqslant\lambda}(\mu)$ endlich erzeugt).

Lemma 4.6. *Die kanonische Abbildung*

$$\prod_{\mu\leq\lambda} \mathrm{End}(P_\mu) \to \prod_{\mu\leq\lambda} \mathrm{End}\left(P'_\mu\right)$$

induziert Abbildungen

$$Z_T^{\leqslant\lambda} \to Z_{T'}^{\leqslant\lambda}$$

und

$$Z_T \to Z_{T'}.$$

Beweis. Nach Proposition 3.4 ist $\mathrm{Hom}(P'_\mu, P'_\nu) = \mathrm{Hom}(P_\mu, P_\nu) \otimes_T T'$. Also vertauscht das Bild eines $z \in Z_T^{\leqslant\lambda}$ mit jedem Morphismus $P'_\mu \to P'_\nu$, liegt also in $Z_{T'}^{\leqslant\lambda}$ nach Proposition 4.4. Die Abbildung $Z_T^{\leqslant\lambda} \to Z_{T'}^{\leqslant\lambda}$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der P_μ, nach Proposition 4.2 erhalten wir also auch eine Abbildung $Z_T \to Z_{T'}$. □

Bemerkung 4.7. Alle bisherigen Konstruktionen lassen sich ebenfalls in viel allgemeineren Fällen, wie z.B. für $\mathbb{Z}$-graduierte oder triangulierte Lie-Algebren durchführen und die Sätze behalten ihre Richtigkeit.

Bemerkung 4.8. Sei T eine komplette lokale S-Algebra. Für jede Vereinigung von Äquivalenzklassen $\theta \subset \mathfrak{h}^\star/{\sim_T}$ seien analog $Z_{T,\theta}$ und $Z_{T,\theta}^{\leqslant\lambda}$ die Zentren von $\mathcal{O}_{T,\theta}$ und $\mathcal{O}_{T,\theta}^{\leqslant\lambda}$. Dann gelten die Aussagen dieses Abschnitts auch für $Z_{T,\theta}$ und $Z_{T,\theta}^{\leqslant\lambda}$.

5. Orbiten und Äquivalenzklassen

Wir brauchen von nun an mehr Information über die Multiplizitäten $[\Delta(\lambda) : L(\mu)]$. Sei dazu $(\cdot,\cdot)\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ eine nicht-ausgeartete invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$. Auch die Einschränkung auf $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ ist dann nicht-ausgeartet und induziert damit eine Bilinearform $(\cdot,\cdot)\colon \mathfrak{h}^\star \times \mathfrak{h}^\star \to \mathbb{C}$. Für jede S-Algebra T sei $\mathfrak{h}^\star_T = \mathfrak{h}^\star \otimes_{\mathbb{C}} T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, T)$ und $(\cdot,\cdot)_T : \mathfrak{h}^\star_T \times \mathfrak{h}^\star_T \to T$ die T-bilineare Fortsetzung. Wir fassen $\mathfrak{h}^\star \cong \mathfrak{h}^\star \otimes 1 \subset \mathfrak{h}^\star_T$ als Unterraum auf. Der Strukturmorphismus $\tau\colon \mathfrak{h} \to S \to T$ ist ein Element in $\mathfrak{h}^\star_T$. Sei $\rho \in \mathfrak{h}^\star$ ein Element, daß auf jeder einfachen Kowurzel den Wert 1 annimmt.

Sei T eine komplette lokale S-Algebra mit Restklassenkörper $\mathbb{K}_T$.

Definition 5.1. Sei $\uparrow_T$ die partielle Ordnung auf $\mathfrak{h}^\star$, die erzeugt wird von $\mu \uparrow_T \lambda$, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine positive Wurzel $\beta \in \Delta_+$ gibt mit $2(\lambda+\rho+\tau,\beta)_{\mathbb{K}_T} = n(\beta,\beta)_{\mathbb{K}_T}$ und $\lambda - \mu = n\beta$.

Theorem 5.2. *Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\star$. Dann ist*

$$[\Delta_{\mathbb{K}_T}(\lambda), L_{\mathbb{K}_T}(\mu)] \neq 0$$

genau dann, wenn $\mu \uparrow_T \lambda$. Die Äquivalenzrelation $\sim_T$ wird also von $\uparrow_T$ erzeugt.

Beweis. siehe [KK], Theorem 2. □

Sei W die Weylgruppe von $\mathfrak{g}$. In gewissen Fällen können wir die Äquivalenzklassen nun als Orbiten unter Untergruppen von W beschreiben. Sei $\Delta_+^{re} \subset \Delta_+$ die Menge der positiven reellen Wurzeln von $\mathfrak{g}$.

Definition 5.3. Für jedes $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ sei

$$\Delta_+^T(\lambda) = \{\alpha \in \Delta_+ \mid 2(\lambda + \tau, \alpha)_{\mathbb{K}_T} \in \mathbb{Z}(\alpha, \alpha)_{\mathbb{K}_T}\}\,.$$

Für jedes $\alpha \in \Delta_+^{re}$ gibt es eine Spiegelung $s_\alpha \in W$. Falls $\Delta_+^T(\lambda) \subset \Delta_+^{re}$, so können wir auch

$$W^T(\lambda) := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+^T(\lambda)\rangle \subset W$$

definieren.

Wir definieren nun die für unsere Arbeit wichtigsten Deformationsringe.

Definition 5.4. Sei $\hat{S}$ die Komplettierung von S am von $\mathfrak{h} \subset S$ erzeugten Ideal und Q der Quotientenkörper. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ sei $\hat{S}_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung an $\mathfrak{p}$ und $\mathbb{K}_\mathfrak{p} := \hat{S}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ der Restklassenkörper. Für $\alpha \in \Delta$ sei $h_\alpha := (\tau, \alpha)_{\hat{S}} \in \mathfrak{h} \subset \hat{S}$, $\hat{S}_\alpha$ die Lokalisierung am Primideal $\hat{S}h_\alpha$ und $\mathbb{K}_\alpha = \hat{S}_\alpha/\hat{S}_\alpha h_\alpha$ der Restklassenkörper.

Lemma 5.5. *Sei $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal und $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$. Dann ist*

$$\Delta_+^{\hat{S}_\mathfrak{p}}(\lambda) = \left\{\alpha \in \Delta_+^{\hat{S}}(\lambda) \mid h_\alpha \in \mathfrak{p}\right\}.$$

Beweis. Es ist $(\lambda+\tau, \alpha)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} = (\lambda+\tau, \alpha)_{\hat{S}} + \mathfrak{p}$. Wegen $(\lambda, \alpha)_{\hat{S}} = (\lambda, \alpha)_\mathbb{C} \in \mathbb{C}$ und $(\tau, \alpha)_{\hat{S}} \in \mathfrak{h}$ ist $2(\lambda + \tau, \alpha)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}(\alpha, \alpha)$ genau dann, wenn $(\lambda, \alpha)_\mathbb{C} \in \mathbb{Z}(\alpha, \alpha)$ und $(\tau, \alpha)_{\hat{S}} \equiv 0$ in $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$. Die erste Bedingung bedeutet $\alpha \in \Delta_+^{\hat{S}}(\lambda)$ und die zweite $h_\alpha = (\tau, \alpha)_{\hat{S}} \in \mathfrak{p}$. □

Bemerkung 5.6. Sei $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal. Ist $\Delta_+^{\hat{S}_\mathfrak{p}}(\lambda) \subset \Delta_+^{re}$, so ist die Äquivalenzklasse von λ unter $\sim_{\hat{S}_\mathfrak{p}}$ nach Theorem 5.2 und Lemma 5.5 genau der Orbit $W^{\hat{S}_\mathfrak{p}}(\lambda).\lambda$, wobei $w.(\mu) = w(\mu + \rho) - \rho$ die zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene Operation sei.

Definition 5.7. Für eine Äquivalenzklasse $\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/\sim_{\hat{S}}$ und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ sei

$$\Delta_+^{\hat{S}_\mathfrak{p}}(\Lambda) := \Delta_+^{\hat{S}_\mathfrak{p}}(\lambda)$$

für ein $\lambda \in \Lambda$. Diese Definition hängt nicht von der Wahl von λ ab.

Proposition 5.8.
(1) *Sei $\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/\sim_{\hat{S}}$ eine Äquivalenzklasse und $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal mit $h_\alpha \notin \mathfrak{p}$ für alle $\alpha \in \Delta_+^{\hat{S}}(\Lambda)$. Dann zerfällt Λ unter $\sim_{\hat{S}_\mathfrak{p}}$ in einelementige Äquivalenzklassen und jeder Verma-Modul aus $\mathcal{O}_{\hat{S}_\mathfrak{p},\Lambda}$ ist projektiv.*
(2) *Sei $\alpha \in \Delta_+^{re}$ reell und Λ eine Äquivalenzklasse unter $\sim_{\hat{S}_\alpha}$. Dann ist $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \emptyset$ oder $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \{\alpha\}$.*

(a) *Falls* $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \emptyset$, *so ist* Λ *einelementig und der zugehörige Verma-Modul in* $\mathcal{O}_{\hat{S}_\alpha,\Lambda}$ *ist projektiv.*

(b) *Falls* $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \{\alpha\}$, *so ist* $\Lambda = \{\lambda, \mu\}$ *mit* $\lambda = s_\alpha.\mu$ *und* $\lambda > \mu$. *Dann ist* $P_{\hat{S}_\alpha}(\lambda) = \Delta_{\hat{S}_\alpha}(\lambda)$ *projektiv und es existiert eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \to \Delta_{\hat{S}_\alpha}(\lambda) \to P_{\hat{S}_\alpha}(\mu) \to \Delta_{\hat{S}_\alpha}(\mu) \to 0.$$

Beweis. zu 1: Nach Lemma 5.5 ist $\Delta_+^{\hat{S}_\mathfrak{p}}(\Lambda) = \emptyset$, also spaltet Λ über $\hat{S}_\mathfrak{p}$ auf in einelementige Äquivalenzklassen. Nach Theorem 5.2 und der BGG-Reziprozität in 3.11 ist also jeder Verma-Modul aus $\mathcal{O}_{\hat{S}_\mathfrak{p},\Lambda}$ projektiv.

zu 2: Nach Lemma 5.5 ist $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \emptyset$ oder $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \{\alpha\}$. Im ersten Fall ist Λ einelementig und wir können wie in 1. argumentieren. Im zweiten Fall ist $\Lambda = \{\lambda, \mu\}$ mit $\lambda = s_\alpha.\mu$ nach Bemerkung 5.6 und wir können $\lambda > \mu$ annehmen. Dann ist $\Delta_{\hat{S}_\alpha}(\lambda)$ projektiv und $\Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu)$ kommt in $\Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\lambda)$ als Untermodul vor. Da der Homomorphismenraum zwischen Verma-Moduln höchstens eindimensional ist, folgt $[\Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\lambda) : \Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu)] = 1$. Nach der BGG-Reziprozität enthält $P_{\hat{S}_\alpha}(\mu)$ die Verma-Moduln $\Delta_{\hat{S}_\alpha}(\lambda)$ und $\Delta_{\hat{S}_\alpha}(\mu)$ also mit Multiplizität 1, der dominante Verma-Modul taucht dabei als Untermodul auf. □

Bemerkung 5.9. Ist $\alpha \in \Delta_+^{re}$ eine reelle Wurzel, so zerfällt $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_\alpha}$ also in Blöcke, die entweder äquivalent zur Kategorie der Vektorräume über $\mathbb{K}_\alpha$ oder äquivalent zum Hauptblock der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2$ über $\mathbb{K}_\alpha$ sind.

Nun können wir das Zentrum auf gewissen Hyperebenen berechnen. Für jede S-Algebra T liefert die Operation des Zentrums auf Verma-Moduln eine Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_T \colon Z_T &\to \prod_{\nu \in \mathfrak{h}^\star} T \\ z &\mapsto \{z|_{\Delta_T(\nu)}\} \end{aligned}$$

Ist T lokal und komplett und $\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/\sim_T$, so erhalten wir auf analoge Weise eine Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_{T,\Lambda} \colon Z_{T,\Lambda} &\to \prod_{\nu \in \Lambda} T \\ z &\mapsto \{z|_{\Delta_T(\nu)}\}. \end{aligned}$$

Proposition 5.10. (1) *Sei* $\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/\sim_{\hat{S}}$ *eine Äquivalenzklasse und* $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ *ein Primideal mit* $h_\alpha \notin \mathfrak{p}$ *für alle* $\alpha \in \Delta_+^{\hat{S}}(\Lambda)$. *Dann ist*

$$\psi_{\hat{S}_\mathfrak{p},\Lambda} \colon Z_{\hat{S}_\mathfrak{p},\Lambda} \xrightarrow{\sim} \prod_{\nu \in \Lambda} \hat{S}_\mathfrak{p}$$

ein Isomorphismus.

(2) *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ *ist die Abbildung* $\psi_{\hat{S}_\mathfrak{p}} : Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}} \to \prod_{\nu \in \mathfrak{h}^\star} \hat{S}_\mathfrak{p}$ *injektiv.*

(3) *Sei* $\alpha \in \Delta_+^{re}$ *reell und* Λ *eine Äquivalenzklasse unter* $\sim_{\hat{S}_\alpha}$. *Nach Proposition 5.8 ist* $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \emptyset$ *oder* $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \{\alpha\}$.

(a) *Falls* $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \emptyset$, *so ist* $Z_{\hat{S}_\alpha,\Lambda} = \hat{S}_\alpha$.

(b) *Falls* $\Delta_+^{\hat{S}_\alpha}(\Lambda) = \{\alpha\}$, *so ist* $\Lambda = \{\lambda, \mu\}$ *nach Proposition 5.8 und* $Z_{\hat{S}_\alpha,\Lambda} = \Big\{\{t_\lambda, t_\mu\} \in \hat{S}_\alpha \oplus \hat{S}_\alpha \mid t_\lambda \equiv t_\mu \mod h_\alpha\Big\}$.

Beweis. zu 1: Nach Proposition 5.8 ist jeder Verma-Modul in $Z_{\hat{S}_\mathfrak{p},\Lambda}$ projektiv und nicht-isomorphe Verma-Moduln liegen in verschiedenen Blöcken. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 4.4.

zu 2: Die kanonische Einbettung $\hat{S}_\mathfrak{p} \to Q$ induziert nach Proposition 4.6 eine Einbettung $Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}} \to Z_Q$ (da $\mathrm{End}(P_\mu) \to \mathrm{End}(P_\mu) \otimes_{\hat{S}_\mathfrak{p}} Q$ injektiv ist) und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}} & \longrightarrow & Z_Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod \hat{S}_\mathfrak{p} & \longrightarrow & \prod Q \end{array}$$

kommutiert. Da die waagrechten Abbildungen injektiv sind und die Abbildung $Z_Q \to \prod Q$ sogar ein Isomorphismus nach 1., ist auch $Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}} \to \prod \hat{S}_\mathfrak{p}$ injektiv.

zu 3: Im ersten Fall kann man wie in 1. argumentieren. Sei also nun $\Lambda = \{\lambda, \mu\}$ mit $\lambda = s_\alpha.\mu$ und $\lambda > \mu$. Wir kürzen die Objekte $Z_{\hat{S}_\alpha,\Lambda}$, $P_{\hat{S}_\alpha}$, $\Delta_{\hat{S}_\alpha}$ und $L_{\hat{S}_\alpha}$ durch Z, P, Δ und L ab.

Es ist $P(\lambda) = \Delta(\lambda)$ und es existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \Delta(\lambda) \to P(\mu) \to \Delta(\mu) \to 0.$$

Sei $f \in \mathrm{End}(P(\mu))$. Wegen $\lambda > \mu$ gilt dann $f(\Delta(\lambda)) \subset \Delta(\lambda)$ und f induziert damit Abbildungen

$$\begin{aligned} f_\lambda \colon \Delta(\lambda) &\to \Delta(\lambda), \\ f_\mu \colon \Delta(\mu) &\to \Delta(\mu). \end{aligned}$$

Da diese Abbildungen durch Skalare aus $\hat{S}_\alpha$ gegeben sind, erhalten wir eine Abbildung

$$\mathrm{End}(P(\mu)) \to \hat{S}_\alpha \oplus \hat{S}_\alpha.$$

Wegen der Natürlichkeit der Operation von Z kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & \hat{S}_\alpha \oplus \hat{S}_\alpha \\ & \mathrm{End}(P_\mu) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Wir behaupten nun, daß $Z \to \mathrm{End}(P(\mu))$ ein Isomorphismus ist. Injektivität folgt aus obigem Diagramm und 2. Wir müssen noch zeigen, daß jedes $f \in \mathrm{End}(P(\mu))$ ein Element des Zentrums induziert. f induziert auch einen Endomorphismus f_λ auf $\Delta(\lambda) \cong P(\lambda)$. Wir benutzen die Charakterisierung des Zentrums aus Proposition 4.4 und müssen also zeigen, daß das Paar $(f, f_\lambda) \in \mathrm{End}(P(\mu)) \oplus \mathrm{End}(P(\lambda))$ im Zentrum von $\mathrm{End}(P(\mu) \oplus P(\lambda))$ liegt. Sicherlich kommutiert (f, f_λ) mit allen Morphismen $P(\lambda) \to P(\mu) \oplus P(\lambda)$. Nun ist $\mathrm{End}(P(\mu))$ kommutativ, wie man an der Einbettung

$$\mathrm{End}(P(\mu)) \hookrightarrow \mathrm{End}(P(\mu)) \otimes_{\hat{S}_\alpha} Q \cong \mathrm{End}(P(\mu) \otimes Q) = Q \oplus Q$$

erkennt. Somit kommutiert (f, f_λ) auch mit Endomorphismen $P(\mu) \to P(\mu)$. Ein $g\colon P(\mu) \to P(\lambda)$ setzen wir fort zu $\tilde{g}\colon P(\mu) \to P(\mu)$ und erhalten die Behauptung.

Wir zeigen jetzt, daß das Bild B von $\mathrm{End}(P(\mu))$ in $\hat{S}_\alpha \oplus \hat{S}_\alpha$ genau $\{(f_\lambda, f_\mu) \mid f_\lambda \equiv f_\mu \mod h_\alpha\}$ ist.

Der Modul $P(\mu) \otimes_{\hat{S}_\alpha} \mathbb{K}_\alpha$ ist nach Lemma 3.7 unzerlegbar und damit isomorph zu $P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu)$. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}(P(\mu)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{End}(P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu)) \arrow[d] \\ \hat{S}_\alpha \oplus \hat{S}_\alpha \arrow[r] & \mathbb{K}_\alpha \oplus \mathbb{K}_\alpha \end{tikzcd}$$

wobei die Abbildung $\mathrm{End}(P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu)) \to \mathbb{K}_\alpha \oplus \mathbb{K}_\alpha$ in analoger Weise durch die Skalare auf den Verma-Faktoren gegeben sei. $P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu)$ ist ein antidominantes projektives Objekt in einer Kategorie, die isomorph ist zum Hauptblock von $\mathfrak{sl}_2$ über $\mathbb{K}_\alpha$ nach Bemerkung 5.9. Der Endomorphismenring $\mathrm{End}(P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu))$ ist dann zweidimensional und man sieht leicht, daß das Bild von $\mathrm{End}(P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu)) \to \mathbb{K}_\alpha \oplus \mathbb{K}_\alpha$ genau die Diagonale $\{(t, t) \in \mathbb{K}_\alpha \oplus \mathbb{K}_\alpha\}$ ist. Ist (f_λ, f_μ) in B, so gilt folglich $f_\lambda \equiv f_\mu \mod h_\alpha$.

Wir müssen nur noch zeigen, daß die Elemente $(1,1)$ und $(h_\alpha, 0)$ im Bild von $\mathrm{End}(P(\mu)) \to \hat{S}_\alpha \oplus \hat{S}_\alpha$ liegen. $(1,1)$ ist das Bild des Einselements.

Wir wählen eine Injektion $\Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu) \to \Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\lambda)$ und definieren die Verkettung der Abbildungen

$$g\colon P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu) \to \Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu) \to \Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\lambda).$$

Nach Proposition 3.4 finden wir einen Lift

$$f\colon P(\mu) \to \Delta(\lambda).$$

Die Verkettung $P(\mu) \to \Delta(\lambda) \to P(\mu)$ induziert Skalare $(f_\lambda, 0)$ und nach Multiplikation mit einem invertierbaren Element in $\hat{S}_\alpha$ finden wir ein Element $f \in \mathrm{End}(P(\mu))$, das die Skalare $(h_\alpha^n, 0)$ für ein $n > 0$ induziert und dessen Bild in $\mathrm{End}(P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu))$ nicht Null ist. Wir wollen nun $n = 1$ zeigen. Dazu benötigen wir starke Hilfsmittel.

Sei $(\cdot,\cdot)\colon \Delta(\lambda) \otimes \Delta(\lambda) \to \hat{S}_\alpha$ eine nicht-ausgeartete und bezüglich der Chevalley-Involution $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ kontravariante Bilinearform. Sei

$$\Delta(\lambda) = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$$

die Jantzen-Filtrierung, also

$$M_i := \left\{ m \in \Delta(\lambda) \mid (m, \Delta(\lambda)) \equiv 0 \mod h_\alpha^i \right\}.$$

Für $\widetilde{M_i} := M_i \otimes_{\hat{S}_\alpha} \mathbb{K}_\alpha$ gilt dann die Jantzen-Summenformel (vgl. [Jan], Satz 5.3 und [KK], Beweis von Theorem 2)

$$\sum_{i>0} \mathrm{ch}\widetilde{M_i} = \sum_{\substack{\alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N} \\ (\lambda+\rho+\tau,\alpha) = n(\alpha,\alpha)}} \mathrm{ch}\Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\lambda - n\alpha),$$

wobei für einen Modul $N \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}_\alpha}$ mit endlich-dimensionalen Gewichtsräumen der Charakter

$$\mathrm{ch}N := \sum_{\nu \in \mathfrak{h}^\star} \dim_{\mathbb{K}_\alpha} N_\nu \cdot e^\nu$$

ein Element in der additiven Gruppe $\mathbb{K}_\alpha[[e^\nu]]$ über den Symbolen e^ν ist.

Auf der rechten Seite der Summenformel steht nun $\mathrm{ch}\Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu)$, also der Charakter eines einfachen Moduls. Dann muß $\widetilde{M_2} = 0$ sein, M_2 also im Kern der Projektion $\Delta(\lambda) \to \Delta_{\mathbb{K}_\alpha}(\lambda)$ liegen.

Wir zeigen $M = \mathrm{im}(f\colon P(\mu) \to \Delta(\lambda)) \subset M_2$, falls $n \geq 2$, was den Widerspruch zur Nicht-Trivialität des Bildes von f in $\mathrm{End}(P_{\mathbb{K}_\alpha}(\mu))$ liefert. Ist $n \geq 2$, so gilt $M_\lambda \subset h_\alpha^2 \Delta(\lambda)_\lambda$. Sei v_λ ein Erzeuger von $\Delta(\lambda)_\lambda, uv_\lambda \in M$ und $wv_\lambda \in \Delta(\lambda)$. Dann ist

$$(uv_\lambda, wv_\lambda) = (\sigma(w)uv_\lambda, v_\lambda) \in h_\alpha^2 \hat{S},$$

da v_λ orthogonal auf $\Delta(\lambda)_\nu$ für $\nu \neq \lambda$ steht. Also ist $M \subset M_2$. $\square$

Nach Proposition 5.10 können wir $Z_{\hat{S}}$ und $Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ als Unterring in $\prod_{\nu \in \mathfrak{h}^\star} Q$ betrachten.

Proposition 5.11. *Es gilt in* $\prod_{\nu \in \mathfrak{h}^\star} Q$

$$Z_{\hat{S}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subset \hat{S} \text{ prim} \\ \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1}} Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}}$$

und analog für jede Äquivalenzklasse $\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/\sim_{\hat{S}}$ *in* $\prod_{\nu \in \Lambda} Q$

$$Z_{\hat{S},\Lambda} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subset \hat{S} \text{ prim} \\ \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1}} Z_{\hat{S}_\mathfrak{p},\Lambda}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß für jedes $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ gilt

$$Z_{\hat{S}}^{\leqslant\lambda} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subset \hat{S} \text{ prim} \\ \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1}} Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}}^{\leqslant\lambda} \subset Z_Q^{\leqslant\lambda}.$$

Daraus folgt die Behauptung mittels Proposition 4.2. Wir wählen projektive Objekte P_μ und identifizieren $Z_{\hat{S}}^{\leqslant\lambda}$, $Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}}^{\leqslant\lambda}$ und $Z_Q^{\leqslant\lambda}$ als Unterringe in $\prod_{\mu \leq \lambda} \operatorname{End}(P_\mu)$, $\prod_{\mu \leq \lambda} \operatorname{End}(P_\mu \otimes \hat{S}_\mathfrak{p})$ und $\prod_{\mu \leq \lambda} \operatorname{End}(P_\mu \otimes Q)$ wie in Proposition 4.4. Wir betrachten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Z_{\hat{S}}^{\leqslant\lambda} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}}^{\leqslant\lambda} \arrow[r] \arrow[d] & Z_Q^{\leqslant\lambda} \arrow[d] \\
\prod \operatorname{End}(P_\mu) \arrow[r] & \prod \operatorname{End}(P_\mu \otimes \hat{S}_\mathfrak{p}) \arrow[r] & \prod \operatorname{End}(P_\mu \otimes Q)
\end{tikzcd}$$

Sicherlich gilt $Z_{\hat{S}}^{\leqslant\lambda} \subset \bigcap Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}}^{\leqslant\lambda}$. Sei nun z im Durchschnitt der $Z_{\hat{S}_\mathfrak{p}}^{\leqslant\lambda}$. Wir wollen $z \in Z_{\hat{S}}^{\leqslant\lambda}$ zeigen. Wegen

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subset \hat{S} \text{ prim} \\ \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1}} \prod_{\mu \leq \lambda} \operatorname{End}(P_\mu \otimes \hat{S}_\mathfrak{p}) &= \bigcap \prod \operatorname{End}(P_\mu) \otimes \hat{S}_\mathfrak{p} \\
&= \prod \bigcap \operatorname{End}(P_\mu) \otimes \hat{S}_\mathfrak{p} \\
&= \prod \operatorname{End}(P_\mu)
\end{aligned}$$

ist $z \in \prod_{\mu \leq \lambda} \operatorname{End}(P_\mu)$. Hier haben wir im letzten Schritt die Identität

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subset A \text{ prim} \\ \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1}} A_\mathfrak{p} = A$$

benutzt, die für alle noetherschen normalen Ringe A gilt ([Ma], Theorem 38). Wegen $\mathrm{Hom}(P_\mu, P_\nu) \subset \mathrm{Hom}(P_\mu \otimes \hat{S}_\mathfrak{p}, P_\nu \otimes \hat{S}_\mathfrak{p})$ (für jedes $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$) kommutiert z aber mit allen Morphismen $P_\mu \to P_\nu$, liegt also nach Proposition 4.4 in $Z_{\hat{S}}^{\leqslant\lambda}$. □

Das nächste Theorem ist das Hauptresultat des ersten Teils dieser Arbeit.

Theorem 5.12. *Sei $\hat{S}$ die Komplettierung von S am von $\mathfrak{h}^\star$ erzeugten Ideal und $\Lambda \in \mathfrak{h}^\star/\sim_{\hat{S}}$ eine Äquivalenzklasse mit $\Delta_+^{\hat{S}}(\Lambda) \subset \Delta_+^{re}$. Dann ist*

$$Z_{\hat{S},\Lambda} \cong \left\{ \{t_\nu\} \in \prod_{\nu\in\Lambda} \hat{S} \mid t_\nu \equiv t_{s_\alpha.\nu} \mod h_\alpha \quad \forall \alpha \in \Delta_+^{\hat{S}}(\Lambda) \right\}.$$

Beweis. Wir benutzen die Propositionen 5.10 und 5.11 . Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1. Gilt $h_\alpha \notin \mathfrak{p}$ für alle $\alpha \in \Delta_+^{\hat{S}}(\Lambda)$, so ist

$$Z_{\mathfrak{p},\Lambda} = \prod \hat{S}_\mathfrak{p}.$$

Ist $h_\alpha \in \mathfrak{p}$, so liegt das Primideal $\hat{S}h_\alpha$ in $\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ die Höhe 1 hat, ist $\mathfrak{p} = \hat{S}h_\alpha$. Ist nun $\alpha \notin \Delta_+^{\hat{S}}(\Lambda)$, so ist

$$Z_{\hat{S}_\alpha,\Lambda} = \prod \hat{S}_\alpha.$$

Ist $\alpha \in \Delta_+^{\hat{S}}(\Lambda)$, so ist nach Voraussetzung α reell und

$$Z_{\hat{S}_\alpha,\Lambda} = \left\{ \{t_\nu\} \in \prod_{\nu\in\Lambda} \hat{S}_\alpha \mid t_\lambda \equiv t_\mu \mod h_\alpha, \text{ falls } \lambda = s_\alpha.\mu \right\}.$$

Der Durchschnitt dieser Ringe liefert nach Proposition 5.11 die Behauptung. □

6. Verschiebungsfunktoren

In diesem Abschnitt betrachten wir Verschiebungsfunktoren zwischen den Blöcken der deformierten Darstellungskategorie $\mathcal{O}_T$. Sei M ein Modul aus $\mathcal{O}_T$ und L ein einfacher integrabler Modul aus $\mathcal{O}$. Dann hat L ein dominantes höchstes Gewicht und der duale Modul L^* hat ein antidominantes niedrigstes Gewicht. Die Definition der Verschiebung in die dominante Richtung beinhaltet das Tensorprodukt $M \otimes_\mathbb{C} L$ und wurde schon in [DGK] untersucht. Das Verschieben in die antidominante Richtung beinhaltet das Tensorprodukt $M \otimes_\mathbb{C} L^*$ und dieses Tensorprodukt liegt i.A. nicht in $\mathcal{O}_T$. Falls M jedoch ein Modul mit Verma-Fahne ist, finden wir einen gewissen maximalen Subquotienten aus den gestutzten Kategorien, den wir dann auf einen Block projizieren können. Deshalb schränken wir uns von vornherein auf die Kategorie der Moduln mit Verma-Fahne ein. Dadurch verlieren wir keine Information, da nach Theorem 3.8 die projektiven Objekte eine Verma-Fahne besitzen. Dieser Funktor wurde im nicht-deformierten Fall ausführlich in [Nei] untersucht, jedoch benützen wir eine leicht veränderte, aber äquivalente Definition.

Da im Allgemeinen der integrable Modul L unendlich dimensional ist und somit die Funktoren $\cdot \otimes L$ und $\cdot \otimes L^*$ nicht adjungiert sind, ist es auch nicht offensichtlich, daß Verschiebungsfunktoren in die dominante Richtung und in die antidominante Richtung adjungiert sind. In den folgenden Abschnitten konstruieren wir explizit Adjunktionen in beide Richtungen (eine der beiden Richtungen wurde im nicht-deformierten Fall schon in [Nei] konstruiert). Obwohl wir uns eingeschränkt haben auf Moduln mit Verma-Fahne, reichen diese Adjunktionen aus um zu zeigen, daß ein projektiver Modul beim Verschieben projektiv bleibt. Das könnte eine kombinatorische Beschreibung der projektiven Decken und speziell der Homomorphismenräume ermöglichen.

Wir stellen nun die wesentlichen Definitionen zur Konstruktion der Verschiebungsfunktoren bereit. Sei T eine S-Algebra, M ein U–T-Bimodul und N ein U-Modul. Dann ist $M \otimes_{\mathbb{C}} N$ auf natürliche Weise ein U–T-Bimodul. Ist M ein Modul aus $\mathcal{O}_T$ und N ein Modul aus $\mathcal{O}$, dann ist $M \otimes_{\mathbb{C}} N$ ein Modul aus $\mathcal{O}_T$. Ist $T \to T'$ ein Morphismus von S-Algebren, so sind $(M \otimes_T T') \otimes_{\mathbb{C}} N$ und $(M \otimes_{\mathbb{C}} N) \otimes_T T'$ auf natürliche Weise isomorph als U–T'-Bimoduln.

Sei $\mathcal{M}_T$ die Unterkategorie von $\mathcal{O}_T$, die aus allen Moduln mit endlicher Verma-Fahne besteht. Analog seien $\mathcal{M}_{T,\theta}, \mathcal{M}_T^{\leqslant\nu}, \dots$ definiert. Nach Theorem 3.8 haben alle projektiven Objekte eine Verma-Fahne.

Definition 6.1. Sei N ein U–T-Bimodul. Eine umgekehrte Verma-Fahne (UVF) von N ist eine Filtrierung

$$N = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots$$

durch Untermoduln N_i, so daß $\bigcap_{i=0}^{\infty} N_i = 0$, $N_i/N_{i-1} \cong \Delta_T(\mu_i)$ für gewisse $\mu_i \in \mathfrak{h}^\star$ und so daß für alle $\nu \in \mathfrak{h}^\star$ die Menge $\{i \mid \mu_i \leq \nu\}$ endlich ist. Wir bezeichnen durch $(N \colon \Delta_T(\kappa)) = \#\{i \mid \mu_i = \kappa\}$ die Multiplizität von $\Delta_T(\kappa)$ als Subquotient von N in dieser UVF.

Bemerkung 6.2. Da wir nur Moduln mit endlicher UVF, also einer Verma-Fahne, mit integrablen Moduln tensorieren, ist die Forderung nach Elementen $n_i \in N$, so daß $n_i + N_{i+1}$ den Modul N_i/N_{i+1} erzeugt und so daß N_i erzeugt wird von $\{n_i, n_{i+1}, \dots\}$, wie sie Neidhardt in [Nei] erhebt, in unserem Fall nicht nötig.

Sei N ein U–T-Bimodul mit UVF und $\nu \in \mathfrak{h}^\star$. Sei $N^{\not\leqslant\nu}$ der von allen Gewichtsräumen N_κ mit $\kappa \not\leqslant \nu$ erzeugte Untermodul von N. Wir definieren

$$N^{\leqslant\nu} := N/N^{\not\leqslant\nu}.$$

Proposition 6.3. (1) *Die in obiger Definition definierte Multiplizität hängt nicht von der Wahl der UVF ab und sie ist additiv, d.h. für eine kurze exakte Sequenz* $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ *von Moduln mit UVF gilt für alle* $\kappa \in \mathfrak{h}^\star$

$$(N \colon \Delta_T(\kappa)) = (N' \colon \Delta_T(\kappa)) + (N'' \colon \Delta_T(\kappa))\,.$$

(2) *Sei N ein Modul mit UVF und $\nu \in \mathfrak{h}^\star$. Dann besitzt auch $N^{\leqslant\nu}$ eine UVF und für die Multiplizitäten gilt*

$$\big(N^{\leqslant\nu} : \Delta_T(\kappa)\big) = \begin{cases} (N : \Delta_T(\kappa)) & \textit{falls } \kappa \leq \nu, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(3) *Sei*

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von Moduln mit UVF. Dann ist auch die induzierte Sequenz

$$0 \to (N')^{\leqslant\nu} \to N^{\leqslant\nu} \to (N'')^{\leqslant\nu} \to 0$$

exakt.

Beweis. Zunächst ist 1. klar im Fall, daß alle Moduln eine *endliche* UVF besitzen. Wir zeigen nun 2. für den Fall einer endlichen UVF. Sei

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = N$$

eine Verma-Fahne und $N_i/N_{i-1} \cong \Delta_T(\mu_i)$. Da $\mathrm{Ext}(\Delta_T(\kappa), \Delta_T(\kappa')) = 0$, falls $\kappa \not\leq \kappa'$, können wir diese Verma-Fahne so wählen, daß alle Subfaktoren zu Gewichten $\kappa \not\leq \nu$ vor denen mit Gewichten $\kappa' \leq \nu$ vorkommen, daß also ein $l > 0$ existiert mit $\mu_i \leq \nu \iff i \geq l$. Dann ist $N^{\leqslant\nu} = N/N_l$, hat also eine Verma-Fahne und die Aussage über die Multiplizitäten folgt.

Wir zeigen nun, daß für jede exakte Sequenz

$$0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$$

von U–T-Bimoduln mit Gewichtsraumzerlegung (nicht notwendigerweise mit UVF) die induzierte Sequenz

$$(N')^{\leqslant\nu} \xrightarrow{\bar f} N^{\leqslant\nu} \xrightarrow{\bar g} (N'')^{\leqslant\nu} \to 0 \qquad (1)$$

exakt ist.

Zunächst ist $\bar g$ surjektiv, da von g induziert. Außerdem liegt das Bild von $\bar f$ sicher im Kern von $\bar g$. Nun ist $g|_{N^{\not\leqslant\nu}} \colon N^{\not\leqslant\nu} \to (N'')^{\not\leqslant\nu}$ surjektiv, da beide Moduln von den Gewichtsräumen in N bzw. N'' zu Gewichten $\kappa \nleqslant \nu$ erzeugt werden und g surjektiv ist. Ist nun $\bar{n} \in \ker \bar{g}$ und $n \in N$ ein Urbild von $\bar{n}$, so ist $g(n) \in (N'')^{\nleqslant \nu}$. Sei $n_0 \in N^{\nleqslant \nu}$ ein Urbild von $g(n)$. Dann liegt $n - n_0$ im Bild von f und $\bar{n} = \overline{n - n_0}$ liegt im Bild von $\bar{f}$, was zu zeigen war.

Haben nun alle Moduln in der exakten Sequenz (1) eine endliche UVF, so folgt durch Vergleich der Multiplizitäten der Verma-Moduln auch die Injektivität der ersten Abbildung. Wir haben also auch 3. für den Fall mit endlicher UVF gezeigt.

Jetzt zeigen wir 2. in aller Allgemeinheit. Sei also N ein beliebiger Modul mit UVF
$$N = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots$$
und $N_i/N_{i+1} \cong \Delta_T(\mu_i)$. Die Inklusionen $N_i \hookrightarrow N$ induzieren Abbildungen $N_i^{\leqslant \nu} \to N^{\leqslant \nu}$ und wir erhalten eine Filtrierung
$$N^{\leqslant \nu} = N_0^{\leqslant \nu} \supset \operatorname{im}(N_1^{\leqslant \nu}) \supset \operatorname{im}(N_2^{\leqslant \nu}) \supset \dots.$$
Wir behaupten, daß
$$\operatorname{im}(N_i^{\leqslant \nu})/\operatorname{im}(N_{i+1}^{\leqslant \nu}) \cong \begin{cases} \Delta_T(\mu_i), & \text{falls } \mu_i \leq \nu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Die exakte Sequenz
$$0 \to N_{i+1} \to N_i \to N_i/N_{i+1} \to 0$$
induziert eine exakte Sequenz
$$N_{i+1}^{\leqslant \nu} \to N_i^{\leqslant \nu} \to (N_i/N_{i+1})^{\leqslant \nu} \to 0$$
und wir erhalten einen Isomorphismus
$$(N_i/N_{i+1})^{\leqslant \nu} \cong N_i^{\leqslant \nu}/\operatorname{im}(N_{i+1}^{\leqslant \nu}).$$
Auf analoge Weise erhalten wir einen Isomorphismus $(N/N_{i+1})^{\leqslant \nu} \cong N^{\leqslant \nu}/\operatorname{im}(N_{i+1}^{\leqslant \nu})$. Wir betrachten nun folgendes kommutative Diagramm
$$\begin{array}{ccccccc}
N_{i+1}^{\leqslant \nu} & \to & N_i^{\leqslant \nu} & \to & N_i^{\leqslant \nu}/\operatorname{im}(N_{i+1}^{\leqslant \nu}) & \cong (N_i/N_{i+1})^{\leqslant \nu} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\operatorname{im}(N_{i+1}^{\leqslant \nu}) & \to & \operatorname{im}(N_i^{\leqslant \nu}) & \to & \operatorname{im}(N_i^{\leqslant \nu})/\operatorname{im}(N_{i+1}^{\leqslant \nu}) & \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & \\
\operatorname{im}(N_{i+1}^{\leqslant \nu}) & \to & N^{\leqslant \nu} & \to & N^{\leqslant \nu}/\operatorname{im}(N_{i+1}^{\leqslant \nu}) & \cong (N/N_{i+1})^{\leqslant \nu}
\end{array}$$
Die exakte Sequenz
$$0 \to N_i/N_{i+1} \to N/N_{i+1} \to N/N_i \to 0.$$
besteht aus Moduln mit endlicher UVF und nach dem schon Bewiesenen ist
$$0 \to (N_i/N_{i+1})^{\leqslant \nu} \to (N/N_{i+1})^{\leqslant \nu} \to (N/N_i)^{\leqslant \nu} \to 0$$

exakt, speziell ist die erste Abbildung injektiv. Dann muss aber auch die Abbildung $(N_i/N_{i+1})^{\leqslant\nu} \to \mathrm{im}(N_i^{\leqslant\nu})/\mathrm{im}(N_{i+1}^{\leqslant\nu})$ injektiv sein, aus obigem Diagramm erhalten wir aber auch, daß diese Abbildung surjektiv ist, also ein Isomorphismus. Insgesamt erhalten wir

$$\Delta_T(\mu_i)^{\leqslant\nu} \cong (N_i/N_{i+1})^{\leqslant\nu} \cong \mathrm{im}(N_i^{\leqslant\nu})/\mathrm{im}(N_{i+1}^{\leqslant\nu})$$

und damit die Behauptung. Also hat $N^{\leqslant\nu}$ eine UVF mit den geforderten Multiplizitäten. Damit ist 2. bewiesen. Aus 2. folgt nun auch sofort die Unabhängigkeit der Multiplizitäten von der Verma-Fahne und dann auch die Additivität. Wir müssen also nur noch die Injektivität der induzierten exakten Sequenz aus 3. zeigen. Das folgt nun aber auch aus der Aussage 2. über die Multiplizitäten der Verma-Moduln. □

Lemma 6.4. *Sei $T \to T'$ ein Morphismus von S-Algebren, N ein U–T-Bimodul mit UVF und $\nu \in \mathfrak{h}^\star$. Dann gilt*

$$(N \otimes_T T')^{\leqslant\nu} = N^{\leqslant\nu} \otimes_T T'.$$

Beweis. Zunächst gilt für alle Gewichte κ

$$N_\kappa \otimes_T T' = (N \otimes_T T')_\kappa,$$

also auch $N^{\nleqslant\nu} \otimes_T T' = (N \otimes_T T')^{\nleqslant\nu}$, also auch $N^{\leqslant\nu} \otimes_T T' = (N \otimes_T T')^{\leqslant\nu}$. □

Proposition 6.5. *Sei L^* ein U-Modul mit niedrigstem Gewicht und N ein U–T-Bimodul mit Verma-Fahne. Dann besitzt $N \otimes_{\mathbb{C}} L^*$ eine UVF und für die Multiplizitäten gilt*

$$(N \otimes_{\mathbb{C}} L^* : \Delta_T(\kappa)) = \sum_\chi (N : \Delta_T(\kappa - \chi)) \dim_{\mathbb{C}} L^*_\chi$$

für jedes $\kappa \in \mathfrak{h}^\star$.

Beweis. Sei $0 = \tilde{N}_0 \subset \tilde{N}_1 \subset \cdots \subset \tilde{N}_k = N$ eine Verma-Fahne von N und $n_i \in \tilde{N}_i$ so, daß $n_i + \tilde{N}_{i-1}$ den Verma-Modul $\tilde{N}_i/\tilde{N}_{i-1}$ erzeugt. Sei $\{l_j^*\}_j$ eine $\mathbb{C}$-Basis von L^*, bestehend aus Gewichtsvektoren. Wir können nun die Menge $\{n_i \otimes l_j\}_{i,j} = \{v_0, v_1, \dots\}$ folgendermaßen ordnen: Sei μ_i das Gewicht von v_i, dann folgt $i < j$ aus $\mu_i < \mu_j$. Sei nun N_i das Erzeugnis (als U–T-Bimodul) von $\{v_i, v_{i+1}, \dots\}$. Wir erhalten eine Filtrierung

$$N \otimes_{\mathbb{C}} L^* = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots .$$

Mit denselben Argumenten wie in [Jan], Abschnitt 2.2 können wir zeigen, daß N_i/N_{i+1} isomorph ist zu $\Delta_T(\mu_i)$. Damit ist obige Filtrierung tatsächlich eine UVF. Die Aussage über die Multiplizitäten folgt nun direkt aus der Konstruktion. □

Nun können wir die Verschiebungsfunktoren definieren. Wir wählen zunächst die entsprechenden Blöcke. Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\star$ dominant und $\theta := \lambda - \mu > 0$. Sei L der einfache Modul mit höchstem Gewicht θ und L^* der duale Modul, also der einfache Modul mit niedrigstem Gewicht $-\theta$. Beide Moduln sind integrabel, speziell gilt $\dim L_{w(\kappa)} = \dim L_\kappa$ für alle $w \in W$ und $\kappa \in \mathfrak{h}^\star$. Seien $[\lambda]$ und $[\mu]$ die Äquivalenzklassen von λ und μ unter $\sim_{\hat{S}}$. Für einen Modul M aus $\mathcal{O}_{\hat{S}}$ sei $M_{[\lambda]}$ bzw. $M_{[\mu]}$ die Projektion von M auf den $[\lambda]$- bzw. $[\mu]$-Block.

Wir fordern weiter, daß λ (und damit auch μ) nur ganz bzgl. reeller Wurzeln ist (im affinen Fall also ausserhalb der kritischen Hyperebene liegt), also sei $\Delta_+^{\hat{S}}(\lambda) = \Delta_+^{\hat{S}}(\mu) \subset \Delta_+^{re}$. Wegen $\Delta_+^{\hat{S}}(\lambda) = \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$ ist auch $W^{\hat{S}}(\lambda) = W^{\hat{S}}(\mu)$. Wir fordern weiter, daß λ regulär ist, also $\{\gamma \in \Delta_+^{re} \mid \langle \lambda + \rho, \gamma^\vee \rangle = 0\} = \emptyset$ und μ nur auf der α-Wand liege, also $\{\gamma \in \Delta_+^{re} \mid \langle \mu + \rho, \gamma^\vee \rangle = 0\} = \{\alpha\}$ für eine positive reelle Wurzel α. Nach Bemerkung 5.6 gilt für die Äquivalenzklassen $[\lambda] = W^{\hat{S}}(\lambda).\lambda$ und $[\mu] = W^{\hat{S}}(\mu).\mu$. Im Folgenden werden wir nur noch mit lokalen $\hat{S}$-Algebren T arbeiten. Nach Proposition 3.12 sind $[\lambda]$ und $[\mu]$ dann abgeschlossen unter $\sim_T$.

Bemerkung 6.6. Wir haben vorausgesetzt, daß es in jeder Äquivalenzklasse ein dominantes Gewicht gibt. Im Fall von affinen Kac–Moody-Algebren liegen die Blöcke also im positiven Level. Da dann jeder Orbit ein höchstes Gewicht hat, müssen wir nicht zu gestutzten Kategorien übergehen. Die folgenden Ergebnisse sind aber auch im Fall, daß beide Äquivalenzklassen ein antidominantes Gewicht enthalten, richtig für die gestutzten Blöcke. Ausserdem könnten wir die Voraussetzung an die Regularität von λ so abschwächen, daß wir fordern, daß der Stabilisator von λ endlichen Index im Stabilisator von μ habe.

Definition 6.7. Sei T eine lokale $\hat{S}$-Algebra. Der Verschiebungsfunktor aus der Wand

$$\vartheta_{out} = \vartheta_{out}^T \colon \mathcal{M}_{T,[\mu]} \to \mathcal{M}_{T,[\lambda]}$$

und der Verschiebungsfunktor auf die Wand

$$\vartheta_{on} = \vartheta_{on}^T \colon \mathcal{M}_{T,[\lambda]} \to \mathcal{M}_{T,[\mu]}$$

seien definiert durch

$$\begin{aligned} \vartheta_{out}(M) &= (M \otimes_{\mathbb{C}} L)_{[\lambda]}, \\ \vartheta_{on}(N) &= ((N \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant \mu})_{[\mu]}. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.8. $M \otimes_{\mathbb{C}} L$ und $(N \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant \mu}$ sind Moduln aus $\mathcal{O}_T$, deshalb sind die Verschiebungsfunktoren wohldefiniert.

Wir betrachten nun das Verhalten der Verschiebungsfunktoren unter Basiswechsel.

Lemma 6.9. *Sei $T \to T'$ ein Morphismus von lokalen $\hat{S}$-Algebren und $M \in \mathcal{M}_{T,[\mu]}$ (bzw. $N \in \mathcal{M}_{T,[\lambda]}$). Dann gibt es natürliche Isomorphismen*

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_{on}(N \otimes_T T') & \cong & (\vartheta_{on} N) \otimes_T T' \\ \vartheta_{out}(M \otimes_T T') & \cong & (\vartheta_{out} M) \otimes_T T' \end{array}$$

Beweis. Der Funktor $\cdot \otimes_T T'$ kommutiert nach Korollar 3.13 mit der Projektion auf einen Block und nach Lemma 6.4 mit dem Funktor $\cdot^{\leqslant \nu}$. $\square$

Lemma 6.10. *Sei T eine lokale $\hat{S}$-Algebra und $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln aus $\mathcal{M}_{T,[\lambda]}$ (bzw. $\mathcal{M}_{T,[\mu]}$). Dann ist auch die Sequenz*

$$0 \to \vartheta_{on} M' \to \vartheta_{on} M \to \vartheta_{on} M'' \to 0$$

(bzw.$0 \to \vartheta_{out} M' \to \vartheta_{out} M \to \vartheta_{out} M'' \to 0$) exakt.

Beweis. ϑ_{out} ist als Verkettung der exakten Funktoren $\cdot \otimes_{\mathbb{C}} L$ und $(\cdot)_{[\lambda]}$ exakt. Nach Proposition 6.3 ist auch

$$0 \to (M' \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant \mu} \to (M \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant \mu} \to (M'' \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant \mu} \to 0$$

exakt und alle Moduln liegen in $\mathcal{O}_T$. Dann bleibt auch die Projektion auf die $[\mu]$-Komponente exakt. $\square$

Proposition 6.11. *Sei T eine lokale $\hat{S}$-Algebra und $x \in W^{\hat{S}}(\lambda)$. Dann ist*

$$\vartheta_{on}(\Delta_T(x.\lambda)) \cong \Delta_T(x.\mu)$$

und es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to \Delta_d \to \vartheta_{out}(\Delta_T(x.\mu)) \to \Delta_a \to 0,$$

wobei

$$\begin{array}{rclrcll} \Delta_d & = & \Delta_T(xs_\alpha.\lambda), & \Delta_a & = & \Delta_T(x.\lambda), & \textit{falls } xs_\alpha.\lambda > x.\lambda, \\ \Delta_d & = & \Delta_T(x.\lambda), & \Delta_a & = & \Delta_T(xs_\alpha.\lambda), & \textit{falls } xs_\alpha.\lambda < x.\lambda. \end{array}$$

(d und a stehen für dominant *und* antidominant*).*

Beweis. Nach den Propositionen 6.3 und 6.5 haben sowohl $\vartheta_{on}\Delta_T(x.\lambda)$ als auch $\vartheta_{out}\Delta_T(x.\mu)$ eine Verma-Fahne, deren Subquotienten $\Delta_T(x.\lambda - \tilde{\theta})$ bzw. $\Delta_T(x.\mu + \tilde{\theta})$ für Gewichte $\tilde{\theta}$ von L mit $x.\lambda - \tilde{\theta} \in W^{\hat{S}}(\mu).\mu$ bzw. $x.\mu + \tilde{\theta} \in W^{\hat{S}}(\lambda).\lambda$ sind. Nun ist $x.\lambda - \tilde{\theta} = w.\mu$ für ein $w \in W^{\hat{S}}(\mu)$ genau dann, wenn $\lambda - x^{-1}(\tilde{\theta}) = (x^{-1}w).\mu$. Da L integrabel ist, ist mit $\tilde{\theta}$ auch

$x^{-1}(\tilde{\theta})$ ein Gewicht von L mit derselben Multiplizität. Analoges gilt für $x.\mu + \tilde{\theta} = w.\lambda$. Wir können uns also auf den Fall $x = e$ beschränken.

Nun folgt aus $\tilde{\theta} \leq \theta$

$$\lambda - \tilde{\theta} \geq \lambda - \theta = \mu \geq w.\mu,$$

für alle $w \in W^{\hat{S}}(\mu)$, da μ dominant ist. Also folgt $\lambda - \tilde{\theta} \in W^{\hat{S}}(\mu).\mu$ genau dann, wenn $\tilde{\theta} = \theta$. Da der Gewichtsraum L_θ eindimensional ist, folgt die erste Behauptung. Aus $\mu + \tilde{\theta} = w.\lambda$ folgt $w^{-1}.\mu = \lambda - w^{-1}\tilde{\theta}$ und nach dem eben Bewiesenen $w^{-1}.\mu = \mu$ und $w^{-1}\tilde{\theta} = \theta$. Da λ auf allen Wänden wie μ ausser der α-Wand liegt, gibt es genau die Fälle $\mu+\theta = \lambda$ und $\mu+s_\alpha(\theta) = s_\alpha.\lambda$. Beide Fälle tauchen mit Multiplizität 1 auf. Die Reihenfolge der Subquotienten in der kurzen exakten Sequenz wird durch die Ordnung der Gewichte gegeben, der Verma-Modul zum grösseren Gewicht taucht dabei als Untermodul auf. □

Über gewissen Hyperebenen zerfällt nun die kurze exakte Sequenz aus obiger Proposition auf eindeutige Weise.

Sei $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal der Höhe 1 und $x \in W^{\hat{S}}(\mu)$. Sei $[x.\mu]_\mathfrak{p}$ die Äquivalenzklasse von $x.\mu$ unter $\sim_{\hat{S}_\mathfrak{p}}$, dann zerfällt $\mathcal{O}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[\mu]}$ in Blöcke der Form $\mathcal{O}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}$. Im folgenden Lemma schränken wir ϑ_{out} ein auf den Block $\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}$.

Lemma 6.12. *Sei $h_{x\alpha} \notin \mathfrak{p}$. Dann sind die Äquivalenzklassen $[x.\lambda]_\mathfrak{p}$ und $[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}$ disjunkt. Also zerfällt $\vartheta_{out}|_{\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}}$ kanonisch in die direkte Summe zweier Funktoren*

$$\vartheta_{out}|_{\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}} \cong \vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}} \oplus \vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}}.$$

Beweis. Ist $h_\beta \notin \mathfrak{p}$ für alle $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$, so sind alle Äquivalenzklassen einelementig nach Proposition 5.8. Ist $h_\beta \in \mathfrak{p}$ für ein $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$, so ist $\mathfrak{p} = \hat{S}h_\beta$ und wir müssen zeigen, daß gilt $s_\beta x.\lambda \neq xs_\alpha.\lambda$. Nun ist $s_\beta x.\lambda = xs_\alpha.\lambda$ genau dann, wenn $x^{-1}s_\beta x.\lambda = s_\alpha.\lambda$ und wegen $x^{-1}s_\beta x = s_{x^{-1}\beta}$ ist Letzteres äquivalent zu $s_{x^{-1}\beta}.\lambda = s_\alpha.\lambda$ oder $x^{-1}\beta = \pm\alpha$. Das ist genau der Fall, den wir ausgeschlossen haben. □

Definition 6.13. Für $x \in W^{\hat{S}}(\mu)$ nennen wir die positive Wurzel $\beta \in \{\pm x\alpha\}$ die *kritische Wurzel für x.*

Bemerkung 6.14. Ist β die kritische Wurzel für x, so ist β auch die kritische Wurzel für xs_α.

Bemerkung 6.15. $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$ ist genau dann die kritische Wurzel für x, wenn es einen nichttrivialen Morphismus $(\Delta_a)_{\mathbb{K}_\beta} \to (\Delta_d)_{\mathbb{K}_\beta}$ gibt.

Bemerkung 6.16. Ist β die kritische Wurzel für x, so liegt $x.\mu$ auf der β-Wand, d.h. $s_\beta x.\mu = xs_\alpha.\mu = x.\mu$.

Wir zeigen nun schon, daß projektive Objekte beim Verschieben projektiv bleiben, falls die Verschiebungsfunktoren ϑ_{on} und ϑ_{out} rechts- bzw. linksadjungiert sind. In den nächsten beiden Abschnitte werden wir beide Adjunktionen konstruieren.

Proposition 6.17. *Sei T eine lokale $\hat{S}$-Algebra. Es gebe eine Adjunktion $(\vartheta_{on}, \vartheta_{out})$, also einen Isomorphismus von Bifunktoren*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{T,[\mu]}}(\vartheta_{on}\cdot, \cdot) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{T,[\lambda]}}(\cdot, \vartheta_{out}\cdot).$$

Sei $P \in \mathcal{O}_{T,[\lambda]}$ projektiv. Dann ist auch $\vartheta_{on}P \in \mathcal{O}_{T,[\mu]}$ projektiv. Analoges gilt für eine Adjunktion $(\vartheta_{out}, \vartheta_{on})$.

Beweis. Sei $P \in \mathcal{O}_{T,[\lambda]}$ projektiv und $\tilde{P} \in \mathcal{O}_{T,[\mu]}$ ein projektives Objekt mit einer Surjektion $\tilde{P} \to \vartheta_{on}P$ (da μ dominant ist, also $\mathcal{O}_{T,[\mu]} \cong \mathcal{O}^{\leqslant\mu}_{T,[\mu]}$, existiert ein solches projektives Objekt nach Proposition 3.3). Wir zeigen, daß diese Surjektion spaltet, $\vartheta_{on}P$ also ein direkter Summand eines projektiven Moduls und damit selbst projektiv ist. Eine Spaltung ist ein Urbild der Identität unter der induzierten Abbildung $\mathrm{Hom}(\vartheta_{on}P, \tilde{P}) \to \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}P, \vartheta_{on}P)$. Wir wenden die Adjunktion an und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}P, \tilde{P}) & \to & \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}P, \vartheta_{on}P) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Hom}(P, \vartheta_{out}\tilde{P}) & \to & \mathrm{Hom}(P, \vartheta_{out}\vartheta_{on}P) \end{array}$$

Aus der Definition von ϑ_{out} folgt, daß $\vartheta_{out}\tilde{P} \to \vartheta_{out}\vartheta_{on}P$ surjektiv ist, wegen der Projektivität von P ist also die untere Abbildung surjektiv. Also ist auch die obere Abbildung surjektiv und es existiert ein Urbild der Identität.

Die entsprechende Aussage für die Adjunktion $(\vartheta_{out}, \vartheta_{on})$ beweist man analog, indem man eine Surjektion $\tilde{P} \to \vartheta_{out}P$ betrachtet und ausnutzt, daß $\vartheta_{on}\tilde{P} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}P$ surjektiv bleibt, nach der Exaktheit der Sequenz (1) aus dem Beweis von Proposition 6.3. □

7. Die Adjunktion $(\vartheta_{on}, \vartheta_{out})$

In [Nei] wurde für den nicht-deformierten Fall schon eine Adjunktion $(\vartheta_{on}, \vartheta_{out})$ konstruiert, sogar für die Definition der Verschiebungsfunktoren auf $\mathcal{O}$ statt auf $\mathcal{M}$. Die Argumente bleiben auch im deformierten Fall gültig.

Theorem 7.1. *Sei T eine lokale $\hat{S}$-Algebra. Es gibt natürliche Transformationen von Funktoren $\vartheta_{on}\vartheta_{out} \to \mathrm{id}_{\mathcal{M}_{T,[\mu]}}$ und $\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{T,[\lambda]}} \to \vartheta_{out}\vartheta_{on}$. Diese Transformationen definieren eine Adjunktion*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{T,[\mu]}}(\vartheta_{on}\cdot, \cdot) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{T,[\lambda]}}(\cdot, \vartheta_{out}\cdot).$$

Beweis. Sei $M \in \mathcal{M}_{T,[\mu]}$ und $\mathrm{can}\colon M \otimes_{\mathbb{C}} L \otimes_{\mathbb{C}} L^* \to M$ der kanonische Morphismus. Nun ist $\vartheta_{out}M$ ein direkter Summand von $M \otimes_{\mathbb{C}} L$ und wir können can einschränken auf den Untermodul $(\vartheta_{out}M) \otimes_{\mathbb{C}} L^*$. Da die Gewichte von M alle kleiner oder gleich μ sind, faktorisiert diese Abbildung über $((\vartheta_{out}M) \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant\mu}$ und da M ein Modul im $[\mu]$-Block ist, sogar über $\vartheta_{on}\vartheta_{out}M = (((\vartheta_{out}M) \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant\mu})_{[\mu]}$ und wir erhalten einen Morphismus $\vartheta_{on}\vartheta_{out}M \to M$. Diese Konstruktion ist verträglich mit allen Morphismen aus $\mathcal{M}_{T,[\mu]}$ und wir erhalten auf diese Weise einen Morphismus von Funktoren $\vartheta_{on}\vartheta_{out} \to \mathrm{id}_{\mathcal{M}_{T,[\mu]}}$.

Sei nun $N \in \mathcal{M}_{T,[\lambda]}$. Wir wählen nun eine Basis $\{l_i\}$ von L bestehend aus Gewichtsvektoren und die duale Basis $\{l_i^*\}$ von L^*. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} N & \to & (N \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant\mu} \otimes_{\mathbb{C}} L \\ n & \mapsto & \sum_i \overline{n \otimes l_i^*} \otimes l_i \end{array}$$

ist wohldefiniert, da nur für endlich viele i das Gewicht von l_i^* kleiner oder gleich μ ist. Wir verketten obige Abbildung dann mit der Projektion $(N \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant\mu} \otimes_{\mathbb{C}} L \to ((N \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant\mu})_{[\mu]} \otimes_{\mathbb{C}} L$ und das Bild dieser Abbildung liegt dann, da N ein Modul aus dem $[\lambda]$-Block ist, in $\vartheta_{out}\vartheta_{on}N = (((N \otimes_{\mathbb{C}} L^*)^{\leqslant\mu})_{[\mu]} \otimes_{\mathbb{C}} L)_{[\lambda]}$. Diese Konstruktion ist verträglich mit allen Morphismen in $\mathcal{M}_{T,[\lambda]}$ und wir erhalten eine natürliche Transformation $\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{T,[\lambda]}} \to \vartheta_{out}\vartheta_{on}$.

Eine natürliche Transformation $\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{T,[\lambda]}} \to \vartheta_{out}\vartheta_{on}$ definiert einen Morphismus von Funktoren

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{T,[\mu]}}(\vartheta_{on}\cdot, \cdot) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{T,[\lambda]}}(\cdot, \vartheta_{out}\cdot)$$

und eine natürliche Transformation $\vartheta_{on}\vartheta_{out} \to \mathrm{id}_{\mathcal{M}_{T,[\mu]}}$ definiert

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{T,[\lambda]}}(\cdot, \vartheta_{out}\cdot) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{T,[\mu]}}(\vartheta_{on}\cdot, \cdot).$$

Diese Abbildungen sind invers zueinander, wenn die natürlichen Transformationen $\vartheta_{on} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\vartheta_{on} \to \vartheta_{on}$ und $\vartheta_{out} \to \vartheta_{out}\vartheta_{on}\vartheta_{out} \to \vartheta_{out}$, die man aus obigen Transformation durch Verknüpfen mit ϑ_{on} und ϑ_{out} und Verkettung erhalten kann, identische Abbildungen sind. Das folgt jedoch leicht aus der Konstruktion. □

Aus Proposition 6.17 und Theorem 7.1 folgt

Korollar 7.2. *Sei T eine lokale $\hat{S}$-Algebra und $P \in \mathcal{O}_{T,[\lambda]}$ projektiv. Dann ist auch $\vartheta_{on}P$ projektiv in $\mathcal{O}_{T,[\mu]}$.*

Wir benützen dieses Korollar im nächsten Abschnitt zur Konstruktion einer Adjunktion $(\vartheta_{out}, \vartheta_{on})$. Aus Theorem 7.1 folgt auch schon nächstes Lemma über die Projektivität von aus der Wand geschobenen Moduln auf Hyperebenen, das wir ebenfalls zur Konstruktion von $(\vartheta_{out}, \vartheta_{on})$ benützen werden.

Lemma 7.3. *Sei $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal der Höhe 1 und P ein projektives Objekt in $\mathcal{O}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[\mu]}$. Dann ist auch $\vartheta_{out}P \in \mathcal{O}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[\lambda]}$ projektiv.*

Beweis. Es reicht, das Lemma für unzerlegbare projektive Objekte zu zeigen. Sei also $x \in W^{\hat{S}}(\mu)$ und $P = P_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$ die projektive Decke von $\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$. Dann ist P entweder isomorph zu $\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$ oder eine Erweiterung von zwei Verma-Moduln.

Sei zunächst P isomorph zu $\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$. Nach Proposition 6.11 existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \Delta_d \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu) \to \Delta_a \to 0$$

mit $\{\Delta_d, \Delta_a\} = \{\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\lambda), \Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(xs_\alpha.\lambda)\}$. Wir unterscheiden nun die Fälle $h_{x\alpha} \notin \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} = \hat{S}h_{x\alpha}$. Im ersten Fall zerfällt obige Sequenz nach Lemma 6.12 und $\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$ ist die direkte Summe der Verma-Moduln $\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\lambda)$ und $\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(xs_\alpha.\lambda)$. Gilt sogar $h_\beta \notin \mathfrak{p}$ für alle $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$, so sind beide Verma-Moduln projektiv nach Proposition 5.8 und somit auch $\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$. Ist $h_\beta \in \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p} = \hat{S}h_\beta$. Auch in diesem Fall sind beide Verma-Moduln projektiv, da $x.\mu$ und $x.\lambda$ bzw. $x.\mu$ und $xs_\alpha.\lambda$ im Abschluss derselben Weylkammer liegen und $x.\mu$ dominant bzgl. β war. Also ist $\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu)$ projektiv. Es bleibt der Fall $\mathfrak{p} = \hat{S}h_{x\alpha}$. Wir zeigen, daß $\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_{x\alpha}}(x.\mu)$ dann isomorph zur projektiven Decke des antidominanten Verma-Moduls $(\Delta_a)_{\hat{S}_{x\alpha}}$ ist.

Sei P_a die projektive Decke von $(\Delta_a)_{\hat{S}_{x\alpha}}$ in $\mathcal{O}_{\hat{S}_{x\alpha}}$. Dann gibt es einen Morphismus $P_a \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_{x\alpha}}(x.\mu)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} P_a \arrow[r] \arrow[dr] & \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_{x\alpha}}(x.\mu) \arrow[d] \\ & (\Delta_a)_{\hat{S}_{x\alpha}} \end{tikzcd}$$

Wir behaupten, daß $P_a \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_{x\alpha}}(x.\mu)$ ein Isomorphismus ist. Da die Multiplizitäten der Verma-Subquotienten beider Moduln übereinstimmen reicht es zu zeigen, daß $P_a \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_{x\alpha}}(x.\mu)$ surjektiv über dem speziellen Punkt $\mathbb{K}_{x\alpha}$ ist. Wir zeigen nun, daß $(\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_{x\alpha}}(x.\mu))_{\mathbb{K}_{x\alpha}} = \vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu)$ isomorph ist zu $(P_a)_{\mathbb{K}_{x\alpha}}$. Nach Definition einer projektiven Decke folgt dann die Surjektivität. Nach Bemerkung 5.9 ist entweder $\vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu)$ isomorph zu $(P_a)_{\mathbb{K}_{x\alpha}}$ oder die direkte Summe des dominanten und antidominanten Subquotienten. Nun gilt

$$\dim_{\mathbb{K}_{x\alpha}} \mathrm{Hom}((\Delta_a)_{\mathbb{K}_{x\alpha}}, \vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu) \cong (P_a)_{\mathbb{K}_{x\alpha}} \\ 2, & \text{falls } \vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu) \text{ zerfällt.} \end{cases}$$

Wir benützen nun die Adjunktion $(\vartheta_{on}, \vartheta_{out})$ aus Proposition 7.1 über dem speziellen Punkt $\mathbb{K}_{x\alpha}$ und erhalten einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(\vartheta_{on}(\Delta_a)_{\mathbb{K}_{x\alpha}}, \Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu)) \cong \mathrm{Hom}((\Delta_a)_{\mathbb{K}_{x\alpha}}, \vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu)).$$

Nach Proposition 6.11 ist $\vartheta_{on}(\Delta_a)_{\mathbb{K}_{x\alpha}}$ isomorph zu $\Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu)$, also ist der linke Raum eindimensional über $\mathbb{K}_{x\alpha}$, also ist $\vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_{x\alpha}}(x.\mu)$ isomorph zu $(P_a)_{\mathbb{K}_{x\alpha}}$. Wir haben die Aussage also für projektive Verma-Moduln gezeigt.

Ist nun $h_\beta \notin \mathfrak{p}$ für alle $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$, so ist jeder unzerlegbare Projektive ein Verma-Modul. Wir müssen uns also nur noch um den Fall kümmern, daß $\mathfrak{p} = \hat{S}h_\beta$ und es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\mu) \to P \to \Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu) \to 0$$

gibt. Nach Proposition 6.11 hat $\vartheta_{out}P_{\hat{S}_\beta}$ eine Verma-Fahne mit Subquotienten $\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\lambda)$, $\Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\lambda)$, $\Delta_{\hat{S}_\beta}(xs_\alpha.\lambda)$ und $\Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta xs_\alpha.\lambda)$ und zerfällt also in eine direkte Summe aus einem Modul mit den Verma-Quotienten $\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\lambda)$ und $\Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\lambda)$ und einem Modul mit Verma-Quotienten $\Delta_{\hat{S}_\beta}(xs_\alpha.\lambda)$ und $\Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta xs_\alpha.\lambda)$. Wir zeigen, daß beide Summanden projektiv sind. Wir wenden denselben Trick wie eben an und betrachten die Adjunktion über dem speziellen Punkt

$$\mathrm{Hom}(\vartheta_{on}(\tilde{\Delta}_a)_{\mathbb{K}_\beta}, P_{\mathbb{K}_\beta}) \cong \mathrm{Hom}((\tilde{\Delta}_a)_{\mathbb{K}_\beta}, \vartheta_{out}P_{\mathbb{K}_\beta}),$$

wobei $\tilde{\Delta}_a$ der antidominante Verma-Modul aus $\{\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\lambda), \Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\lambda)\}$ bzw. $\{\Delta_{\hat{S}_\beta}(xs_\alpha.\lambda), \Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta xs_\alpha.\lambda)\}$ sei. Da nun $P_{\hat{S}_\beta}$ unzerlegbar projektiv ist, ist der linke Raum eindimensional und der rechte eindimensional, wenn die entsprechende Komponente von $\vartheta_{out}P_{\hat{S}_\beta}$ projektiv ist und zweidimensional sonst. □

Zur Definition einer Adjunktion $(\vartheta_{out}, \vartheta_{on})$ wollen wir im nächsten Abschnitt einen Morphismus $\mathrm{id} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}$ konstruieren. Wir zeigen, daß über gewissen Hyperebenen der Funktor $\vartheta_{on}\vartheta_{out}$ in $\mathrm{id} \oplus \mathrm{id}$ zerfällt. Dann muss die Verkettung von $\mathrm{id} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}$ mit der Projektion auf jede Komponente einen Endomorphismus des Identitätsfunktors liefern, also ein Element des Zentrums. Wir werden das zur Konstruktion von $\mathrm{id} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}$ benutzen.

Proposition 7.4. *Sei $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal der Höhe 1, $x \in W^{\hat{S}}(\mu)$ und $h_{x\alpha} \notin \mathfrak{p}$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\vartheta_{on}\vartheta_{out}|_{\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}} \oplus \mathrm{id}_{\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}}$$

von Funktoren von $\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}$ in sich, so daß der kanonische Morphismus $\vartheta_{on}\vartheta_{out} \to \mathrm{id}_{\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}}$ aus Theorem 7.1, eingeschränkt auf jede der beiden Komponenten, die Identität ist.

Beweis. Wir benutzen den Isomorphismus von Funktoren

$$\vartheta_{out}|_{\mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}} \cong \vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}} \oplus \vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}},$$

aus Lemma 6.12. Sei zunächst $\Delta \in \mathcal{M}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}$ ein Verma-Modul. Wir erhalten eine Zerlegung $\vartheta_{out}\Delta = \vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta \oplus \vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta$ und eine Zerlegung $\vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta = \vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta \oplus \vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta$ und müssen zeigen, daß der kanonische Morphismus $\vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta \to \Delta$, eingeschränkt auf $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta$ und $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta$, ein Isomorphismus ist.

Da $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta$ isomorph zu Δ ist, reicht es zu zeigen, daß die Einschränkung von $\vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta \to \Delta$ auf $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta$ nicht Null über dem speziellen Punkt $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$ ist. Dort ist sie aber das Bild der Inklusion

$$(\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to (\vartheta_{out}\Delta)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}$$

unter der Adjunktion

$$\mathrm{Hom}((\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}, \vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}) \cong \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}(\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}, \Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}).$$

Analog beweist man, daß die Abbildung $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta \to \Delta$ ein Isomorphismus ist.

Wir zeigen nun, daß auch für unzerlegbare projektive Objekte $P \in \mathcal{O}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[x.\mu]_\mathfrak{p}}$ die Abbildungen $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}P \to P$ und $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}}P \to P$ Isomorphismen sind. Wir brauchen nur noch den Fall betrachten, daß es eine kurze exakte Sequenz $0 \to \Delta_d \to P \to \Delta_a \to 0$ gibt. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_{\mathfrak{p}}}\Delta_d & \xrightarrow{\sim} & \Delta_d \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_{\mathfrak{p}}}P & \longrightarrow & P \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_{\mathfrak{p}}}\Delta_a & \xrightarrow{\sim} & \Delta_a \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Nach dem Fünferlemma ist auch $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_{\mathfrak{p}}}P \to P$ ein Isomorphismus für jedes unzerlegbare projektive Objekt P. Enstprechendes gilt dann auch für alle Projektiven. Analog zeigt man daß $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_{\mathfrak{p}}}P \to P$ ein Isomorphismus ist für jeden Projektiven P.

Da jedes Objekt aus $\mathcal{M}_{\hat{S}_{\mathfrak{p}},[x.\mu]_{\mathfrak{p}}}$ isomorph ist zu einem Kokern einer Abbildung zwischen zwei projektiven Objekten, erhalten wir die Behauptung. $\square$

8. Die Adjunktion $(\vartheta_{out}, \vartheta_{on})$

Wir wollen eine Transformation von Funktoren id $\to \vartheta_{on}\vartheta_{out}$ von $\mathcal{M}_{\hat{S},[\mu]}$ in sich definieren und konstruieren diese Transformation zunächst auf Verma-Moduln. Sei $x \in W^{\hat{S}}(\mu)$. Nach Proposition 6.11 können wir für alles weitere eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \Delta_d \xrightarrow{i} \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \xrightarrow{\pi} \Delta_a \to 0$$

auswählen. Wir betrachten auch die auf die Wand geschobene kurze exakte Sequenz

$$0 \to \vartheta_{on}\Delta_d \xrightarrow{\vartheta_{on}i} \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \xrightarrow{\vartheta_{on}\pi} \vartheta_{on}\Delta_a \to 0.$$

Die im nächsten Lemma definierte Abbildung $\phi\colon \Delta_a \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$ kommt einer Spaltung am nächsten. Wir werden sie zur Definition von $\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$ benutzen.

Lemma 8.1. (1) *Es gibt genau eine Abbildung $\phi\colon \Delta_a \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$, so daß der Morphismus $\pi \circ \phi\colon \Delta_a \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \Delta_a$ durch Multiplikation mit $h_{x\alpha}$ gegeben ist.*

(2) *Sei $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal mit $h_{x\alpha} \in \mathfrak{p}$. Dann haben die Abbildungen*

$$(\vartheta_{on}i)_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}} : (\vartheta_{on}\Delta_d)_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(x.\mu)$$

und

$$(\vartheta_{on}\phi)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}: (\vartheta_{on}\Delta_a)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$$

dasselbe Bild.

(3) *Sei* can: $\vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$ *die durch die Transformation* $\vartheta_{on}\vartheta_{out} \to \mathrm{id}$ *aus Theorem 7.1 gegebene Abbildung. Die Verknüpfungen*

$$\mathrm{can} \circ \vartheta_{on} i: \vartheta_{on}\Delta_d \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$$

und

$$\mathrm{can} \circ \vartheta_{on}\phi: \vartheta_{on}\Delta_a \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$$

sind Isomorphismen.

Beweis. zu 1: Über dem generischen Punkt zerfällt $\vartheta_{out}(\Delta_Q(x.\mu))$ in die direkte Summe aus $(\Delta_a)_Q$ und $(\Delta_d)_Q$, es gibt also eine eindeutig bestimmte Abbildung $(\Delta_a)_Q \to \vartheta_{out}(\Delta_Q(x.\mu))$, so daß die Verknüpfung $(\Delta_a)_Q \to \vartheta_{out}(\Delta_Q(x.\mu)) \to (\Delta_a)_Q$ durch Multiplikation mit $h_{x\alpha}$ gegeben ist. Sei $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal der Höhe 1. Wir zeigen nun, daß es auch über der Hyperebene $\hat{S}_\mathfrak{p}$ eine derartige Abbildung gibt. Alle diese Morphismen induzieren dann denselben Morphismus über dem generischen Punkt, der Schnitt über alle $\hat{S}_\mathfrak{p}$ liefert dann den Morphismus $\phi: \Delta_a \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$ über $\hat{S}$ nach folgendem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta_a & \longrightarrow & (\Delta_a)_{\hat{S}_\mathfrak{p}} & \longrightarrow & (\Delta_a)_Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) & \longrightarrow & \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu) & \longrightarrow & \vartheta_{out}\Delta_Q(x.\mu)
\end{array}$$

Ist $\mathfrak{p} \neq \hat{S}_\beta$ für alle Wurzeln $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$ oder $\mathfrak{p} = \hat{S}h_\beta$ und β nicht die kritische Wurzel für x, so spaltet die exakte Sequenz und die gesuchte Abbildung existiert. Ist $\beta = x\alpha$ die kritische Wurzel für x, so ist $\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu)$ die projektive Decke von $(\Delta_a)_{\hat{S}_\beta}$ nach dem Beweis von Lemma 7.3. Nach dem Beweis von Proposition 5.10 existiert ein Endomorphismus von $\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu)$, der auf dem dominanten Verma-Untermodul die Nullabbildung und auf dem antidominanten Verma-Quotienten die Multiplikation mit $h_{x\alpha}$ induziert. Dieser Endomorphismus faktorisiert also über einen Morphismus $(\Delta_a)_{\hat{S}_\beta} \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

zu 2: Nach Konstruktion ist die Verknüpfung $\pi \circ \phi$ die Multiplikation mit $h_{x\alpha}$, also Null über $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$, faktorisiert also über eine Abbildung

$(\Delta_d)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to \vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$ und wir erhalten eine Kette von Abbildungen $(\Delta_a)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to (\Delta_d)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to \vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$, die nicht Null ist, da sonst $h_{x\alpha}^{-1}\phi\colon \Delta_a \to \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$ eine wohldefinierte Abbildung wäre und eine Spaltung definieren würde. Aber über der kritischen Hyperebene $\hat{S}_{x\alpha}$ ist $\vartheta_{out}(\Delta_{\hat{S}_{x\alpha}}(x.\mu)$ projektiv nach Lemma 7.3, also eine projektive Decke, also unzerlegbar. Auf der Wand erhalten wir eine nichttriviale Abbildung $\vartheta_{on}(\Delta_a)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to \vartheta_{on}(\Delta_d)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$. Nach Proposition 6.11 gilt $\vartheta_{on}(\Delta_a)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \cong \vartheta_{on}(\Delta_d) \cong \Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$, also muß $\vartheta_{on}(\Delta_a)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to \vartheta_{on}(\Delta_d)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}$ ein Isomorphismus sein, folglich sind die Bilder der Abbildungen $\vartheta_{on}(\Delta_a)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$ und $\vartheta_{on}(\Delta_d)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}(x.\mu)$ identisch.

zu 3: Wir betrachten zunächst den dominanten Fall. Nach Proposition 6.11 sind $\vartheta_{on}\Delta_d$ und $\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$ isomorph, wir müssen also nur zeigen, daß die Abbildung $\mathrm{can} \circ \vartheta_{on} i$ nicht Null ist über dem speziellen Punkt $\mathbb{C}$. Sie ist aber das Bild der Inklusion $(\Delta_d)_\mathbb{C} \to \vartheta_{out}\Delta_\mathbb{C}(x.\mu)$ unter der Adjunktion aus Theorem 7.1

$$\mathrm{Hom}((\Delta_d)_\mathbb{C}, \vartheta_{out}\Delta_\mathbb{C}(x.\mu)) \cong \mathrm{Hom}((\vartheta_{on}\Delta_d)_\mathbb{C}, \Delta_\mathbb{C}(x.\mu)),$$

also nicht Null.

Auch im antidominanten Fall sind die Moduln $\vartheta_{on}\Delta_a$ und $\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$ isomorph. Wir müssen nur zeigen, daß $\mathrm{can} \circ \vartheta_{on}\phi$ ein Isomorphismus über dem speziellen Punkt $\mathbb{C}$ ist. Nach 2. sind aber die Bilder von $(\vartheta_{on}\phi)_\mathbb{C}$ und $(\vartheta_{on} i)_\mathbb{C}$ gleich. Da $(\mathrm{can} \circ \vartheta_{on} i)_\mathbb{C}$ ein Isomorphismus ist, muss also die Verknüpfung $(\mathrm{can} \circ \vartheta_{on}\phi)_\mathbb{C}$ surjektiv sein, also ein Isomorphismus. □

Sei $\epsilon = 1$, falls $x.\lambda > xs_\alpha.\lambda$ und $\epsilon = -1$, falls $xs_\alpha.\lambda > x.\lambda$. Nach Lemma 8.1.3 können wir nun Abbildungen $f_d\colon \Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \vartheta_{on}\Delta_d$ und $f_a\colon \Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \vartheta_{on}\Delta_a$ wählen, so daß die Verknüpfungen

$$\mathrm{can} \circ \vartheta_{on} i \circ f_d\colon \Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$$

und

$$\mathrm{can} \circ \vartheta_{on}\phi \circ f_a\colon \Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$$

gerade $\epsilon \cdot \mathrm{id}_{\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)}$ bzw. $-\epsilon \cdot \mathrm{id}_{\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)}$ sind. Sei

$$\tilde{f}_{x.\mu} := \vartheta_{on} i \circ f_d + \vartheta_{on}\phi \circ f_a\colon \Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu).$$

$$\begin{tikzcd} & \vartheta_{on}\Delta_d \arrow[d, "\vartheta_{on} i"] & \\ \Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \arrow[ur, "f_d"] \arrow[r, "\tilde{f}_{x.\mu}"] \arrow[dr, "f_a"'] & \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \arrow[r, "can"] & \Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \\ & \vartheta_{on}\Delta_a \arrow[u, "\vartheta_{on}\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Lemma 8.2. *Sei $\mathfrak{p} \in \hat{S}$ ein Primideal und $h_{x\alpha} \in \mathfrak{p}$. Dann ist die Abbildung $(\tilde{f}_{x.\mu})_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}$ Null über dem speziellen Punkt $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$.*

Beweis. Nach Konstruktion ist $\mathrm{can} \circ (\vartheta_{on} i \circ f_d + \vartheta_{on}\phi \circ f_a) = 0$. Da über dem speziellen Punkt $\mathrm{im}((\vartheta_{on} i \circ f_d)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}}) = \mathrm{im}((\vartheta_{on}\phi \circ f_a)_{\mathbb{K}_\mathfrak{p}})$ gilt nach Lemma 8.1 und die Einschränkung von can auf dieses gemeinsame Bild ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung. $\square$

Speziell können wir also die Abbildung $\tilde{f}_{x.\mu}$ durch $h_{x\alpha}$ teilen. Die entstehende Abbildung definiert die Transformation $\mathrm{id} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}$ für Verma-Moduln.

Definition 8.3. Sei $f_{x.\mu} := h_{x\alpha}^{-1}\tilde{f}_{x.\mu} \colon \Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$.

Lemma 8.4. *Sei $x \in W^{\hat{S}}(\mu)$, $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal der Höhe 1 und $h_{x\alpha} \notin \mathfrak{p}$. Sei*

$$\begin{aligned} \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu) &\cong \vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu) \oplus \vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[xs_\alpha.\lambda]_\mathfrak{p}}\Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu) \\ &\cong \Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu) \oplus \Delta_{\hat{S}_\mathfrak{p}}(x.\mu) \end{aligned}$$

die Zerlegung nach Proposition 7.4. Dann induziert $(f_{x.\mu})_{\hat{S}_\mathfrak{p}}$ die Multiplikation mit dem Skalar $h_{x\alpha}^{-1}$ (bzw. $-h_{x\alpha}^{-1} = h_{xs_\alpha\alpha}$) auf der linken (bzw. rechten) Komponente.

Beweis. Nach Konstruktion induziert $\tilde{f}_{x.\mu}$ die Abbildungen $\epsilon \cdot \mathrm{id}$ und $-\epsilon \cdot \mathrm{id}$, aus der Definition von $f_{x.\mu}$ folgt nun die Behauptung. $\square$

Proposition 8.5. *Die so für alle Verma-Moduln $\Delta_{\hat{S}}(x.\mu), x \in W^{\hat{S}}(\mu)$, definierten Morphismen $f_{x.\mu}$ setzen sich eindeutig fort zu einer natürlichen Transformation*

$$\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{\hat{S},[\mu]}} \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}.$$

Beweis. Über dem generischen Punkt gibt es genau eine Fortsetzung zu einer natürlichen Transformation, da jeder Modul eine direkte Summe von Verma-Moduln ist. Wir konstruieren eine solche Fortsetzung nun über jeder Hyperebene $\hat{S}_\mathfrak{p}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ der Höhe 1. Die

Fortsetzungen über den Hyperebenen müssen alle dieselbe Transformation über dem generischen Punkt induzieren und induzieren deshalb auch eine Fortsetzung über $\hat{S}$.

Sei also $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ ein Primideal der Höhe 1. Es reicht, eine Fortsetzung für projektive Objekte zu konstruieren, denn für jedes M finden wir eine exakte Sequenz $P' \to P \to M \to 0$ mit projektiven Objekten P und P'. Dann induzieren die Abbildungen $P' \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}P'$ und $P \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}P$ eine Abbildung $M \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}M$. Wir können uns sogar auf unzerlegbare projektive Objekte beschränken.

Ist $h_\beta \notin \mathfrak{p}$ für alle $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$, so ist jedes unzerlegbare projektive Objekt in $\mathcal{O}_{\hat{S}_\mathfrak{p},[\mu]}$ ein Verma-Modul und wir müssen nichts mehr konstruieren. Wir nehmen also nun $\mathfrak{p} = \hat{S}h_\beta$ für ein $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\mu)$ an.

Sei also $P = P_{\hat{S}_\beta}(x.\mu)$ die projektive Decke von $\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu)$. Ist β kritisch für x, so ist nach Bemerkung 6.16 $s_\beta x.\mu = x.\mu$, also ist $P \cong \Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu)$ und die Abbildung schon konstruiert. Sei also nun β nicht kritisch für x. Dann ist entweder $P(x.\mu)$ isomorph zu $\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu)$, die Abbildung also schon konstruiert, oder es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\mu) \to P \to \Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu) \to 0.$$

Da nun β nicht kritisch ist für x (also auch nicht für $s_\beta x$) erhalten wir nach Proposition 7.4 ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\mu) & \to & \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\mu) & \cong & \Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\mu) & \oplus & \Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\mu) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P & & \vartheta_{on}\vartheta_{out}P & \cong & P & \oplus & P \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu) & \to & \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu) & \cong & \Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu) & \oplus & \Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Wir betrachten nun die Projektion von $\vartheta_{on}\vartheta_{out}$ auf die Komponente $\vartheta_{on}\vartheta_{out}^{[x.\lambda]_\mathfrak{p}} \cong \mathrm{id}$. Nach Konstruktion der Morphismen $\Delta \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta$

erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\mu) & \xrightarrow{\cdot h_{s_\beta x\alpha}^{-1}} & \Delta_{\hat{S}_\beta}(s_\beta x.\mu) \\
\downarrow & & \downarrow \\
P & & P \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu) & \xrightarrow{\cdot h_{x\alpha}^{-1}} & \Delta_{\hat{S}_\beta}(x.\mu) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Wegen $1/h_{s_\beta x\alpha} \cong 1/h_{x\alpha} \mod h_\beta$ gibt es nach dem Beweis von Proposition 5.10 genau eine Abbildung $P \to P$, die obiges Diagramm zum Kommutieren bringt. Analog können wir eine Abbildung $P \to P$ auf der zweiten Komponente konstruieren. Die Summe dieser Abbildungen definiert eine Abbildung $P \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}P$ mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

Die Transformation id $\to \vartheta_{on}\vartheta_{out}$ definiert eine natürliche Transformation von Bifunktoren

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}}(\vartheta_{out}\cdot,\cdot) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\hat{S},[\mu]}}(\cdot,\vartheta_{on}\cdot).$$

Theorem 8.6. *Diese natürliche Transformation ist ein Isomorphismus von Funktoren, definiert also eine Adjunktion* $(\vartheta_{out},\vartheta_{on})$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß für alle $N \in \mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}$ die Transformation

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}}(\vartheta_{out}\cdot,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\hat{S},[\mu]}}(\cdot,\vartheta_{on}N)$$

ein Rechtsinverses besitzt. Durch Abzählen der Verma-Faktoren macht man sich klar, daß dieses Rechtsinverse über dem generischen Punkt auch linksinvers ist. Dann ist es aber auch über $\hat{S}$ linksinvers.

Ein funktorielles Rechtsinverses wird gegeben durch ein Urbild von $\mathrm{id}_{\vartheta_{on}N}$ unter $\mathrm{Hom}(\vartheta_{out}\vartheta_{on}N,N) \to \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}N,\vartheta_{on}N)$. Es reicht also zu zeigen, daß für alle Moduln $N \in \mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}$ die Identität $\mathrm{id}_{\vartheta_{on}N}$ im Bild von $\mathrm{Hom}(\vartheta_{out}\vartheta_{on}N,N) \to \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}N,\vartheta_{on}N)$ liegt (wir konstruieren nun also implizit die Transformation $\vartheta_{out}\vartheta_{on} \to \mathrm{id}$). Sei zunächst $N = \Delta$ ein Verma-Modul aus $\mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}$. Sei $x \in W^{\hat{S}}(\lambda)$ und ohne Beschränkung der Annahme $x.\lambda < xs_\alpha.\lambda$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz $0 \to \Delta_d \xrightarrow{i} \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \xrightarrow{\pi} \Delta_a \to 0$. Analog zur Konstruktion von ϕ in Lemma 8.1 können wir auch eine Abbildung $\psi\colon \vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \to \Delta_d$ finden, so daß $\psi \circ i\colon \Delta_d \to \Delta_d$ durch Multiplikation mit h_{x_α} gegeben wird. Da $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}}(\Delta_a, \Delta_d) = 0$ ist $\psi \circ \phi = 0$. Wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \vartheta_{on}\Delta_d \\
\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \arrow[ur, "f_d"] \arrow[r, "f_{x.\mu}"] \arrow[dr, "f_a"'] & \vartheta_{on}\vartheta_{out}\Delta_{\hat{S}}(x.\mu) \arrow[u, "\vartheta_{on}\psi"'] \arrow[d, "\vartheta_{on}\pi"] \\
 & \vartheta_{on}\Delta_a
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen die Behauptung zunächst für den ($x\alpha$-antidominanten) Verma-Modul $\Delta_{\hat{S}}(x.\lambda)$. Wir identifizieren nun $\vartheta_{on}\Delta_{\hat{S}}(x.\lambda) \cong \Delta_{\hat{S}}(x.\mu)$ und $\Delta_a \cong \Delta_{\hat{S}}(x.\lambda)$. Wir betrachten die durch diese Identifikationen entstehenden Abbildungen

$$\pi \colon \vartheta_{out}\vartheta_{on}\Delta_{\hat{S}}(x.\lambda) \to \Delta_{\hat{S}}(x.\lambda)$$

und

$$f_{x.\mu} \colon \vartheta_{on}\Delta_{\hat{S}}(x.\lambda) \to \vartheta_{on}\vartheta_{out}\vartheta_{on}\Delta_{\hat{S}}(x.\lambda).$$

Dann ist nach obigem Diagramm $\vartheta_{on}\pi \circ f_{x.\mu} \colon \vartheta_{on}\Delta_{\hat{S}}(x.\lambda) \to \vartheta_{on}\Delta_{\hat{S}}(x.\lambda)$ invertierbar. Aber $\vartheta_{on}\pi \circ f_{x.\mu}$ ist genau das Bild von π unter obiger Transformation. Also haben wir die Behauptung für den ($x\alpha$-antidominanten) Verma-Modul $\Delta_{\hat{S}}(x.\lambda)$ gezeigt. Analog können wir die Behauptung für den ($x\alpha$-dominanten) Verma-Modul $\Delta_{\hat{S}}(xs_\alpha.\lambda)$ zeigen, indem wir die Abbildung $\psi \colon \vartheta_{out}\vartheta_{on}\Delta_{\hat{S}}(xs_\alpha.\lambda) \to \Delta_{\hat{S}}(xs_\alpha.\lambda)$ (mit den entsprechenden Identifikationen) anstelle von π benutzen.

Wir haben nun also gezeigt, daß für alle Verma-Moduln Δ aus $\mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}}(\vartheta_{out}\cdot, \Delta) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\hat{S},[\mu]}}(\cdot, \vartheta_{on}\Delta)$$

ein Isomorphismus ist.

Sei nun $N = P$ projektiv in $\mathcal{O}_{\hat{S},[\lambda]}$. Es reicht, die Existenz eines Rechtsinversen über jeder Hyperebene $\hat{S}_{\mathfrak{p}}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \hat{S}$ der Höhe 1 zu zeigen. Sei also $P \in \mathcal{O}_{\hat{S}_{\mathfrak{p}},[\lambda]}$ unzerlegbar und projektiv. Ist $\mathfrak{p} \neq \hat{S}_\beta$ für alle $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\lambda)$, so ist P isomorph zu einem Verma-Modul und die Behauptung schon im ersten Schritt gezeigt. Sei nun also $\mathfrak{p} = \hat{S}h_\beta$ für ein $\beta \in \Delta_+^{\hat{S}}(\lambda)$.

Nach Korollar 7.2 und Lemma 7.3 ist auch $\vartheta_{on}P$ bzw. $\vartheta_{out}\vartheta_{on}P$ projektiv in $\mathcal{O}_{\hat{S}_\beta,[\mu]}$ bzw. $\mathcal{O}_{\hat{S}_\beta,[\lambda]}$. Falls P ein Verma-Modul ist, ist nichts zu zeigen, sei ansonsten $0 \to \Delta_d \to P \to \Delta_a \to 0$ eine kurze exakte

Sequenz. Wir erhalten ein Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(\vartheta_{out}\vartheta_{on}P, \Delta_d) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}P, \vartheta_{on}\Delta_d) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(\vartheta_{out}\vartheta_{on}P, P) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}P, \vartheta_{on}P) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(\vartheta_{out}\vartheta_{on}P, \Delta_a) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\vartheta_{on}P, \vartheta_{on}\Delta_a) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Nach dem Fünferlemma ist auch die mittlere Abbildung ein Isomorphismus, also liegt die Identität im Bild.

Sei nun M ein beliebiger Modul aus $\mathcal{M}_{\hat{S},[\lambda]}$. Wir können eine exakte Sequenz $P' \to P \to M \to 0$ wählen mit projektiven Objekten P' und P aus $\mathcal{O}_{\hat{S},[\lambda]}$. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\vartheta_{out}\vartheta_{on}P' & \rightarrow & \vartheta_{out}\vartheta_{on}P & \rightarrow & \vartheta_{out}\vartheta_{on}M \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
P' & \rightarrow & P & \rightarrow & M
\end{array}$$

Wegen der Exaktheit von ϑ_{out} und der Rechtsexaktheit von ϑ_{on} ist $\vartheta_{out}\vartheta_{on}P \to \vartheta_{out}\vartheta_{on}M$ surjektiv, also wird eine Abbildung $\vartheta_{out}\vartheta_{on}M \to M$ induziert, die ein Urbild der Identität auf $\vartheta_{on}M$ ist. □

Wir erhalten nun aus Proposition 6.17 und den Theoremen 7.1 und 8.6 das folgende

Theorem 8.7. *Sei $P \in \mathcal{O}_{\hat{S},[\mu]}$ (bzw. $P \in \mathcal{O}_{\hat{S},[\lambda]}$) projektiv. Dann ist auch $\vartheta_{out}P \in \mathcal{O}_{\hat{S},[\lambda]}$ (bzw. $\vartheta_{on}P \in \mathcal{O}_{\hat{S},[\mu]}$) projektiv.*

Literatur

[Ben] D. J. Benson, *Representations and Cohomology I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, (Cambridge Studies of Advanced Mathematics **30**), Cambridge 1991.

[DGK] Vinay V. Deodhar, Ofer Gaber, Victor G. Kac, *Structure of Some Categories of Representations of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Adv. in Math. **45** (1982), 92–116.

[Jan] Jens Carsten Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lecture Notes in Mathematics **750**, Springer, 1979.

[KK] Victor G. Kac, D. A. Kazhdan, *Structure of Representations with Highest Weight of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Adv. in Math. **34** (1979), 97–108.

[Ma] Hideyuki Matsumura, *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin, New York 1970.

[MoP] Robert V. Moody, Arturo Pianzola, *Lie Algebras With Triangular Decompositions*, John Wiley & Sons, 1995.

[Nei] Wayne Neidhardt, *Translation To and Fro Over Kac-Moody Algebras*, Pacific Journal of Mathematics **139, No.1** (1989), 107–153.

[RCW] Alvany Rocha-Caridi, Nolan R. Wallach, *Projective Modules over Graded Lie Algebras*, Mathematische Zeitschrift **180** (1982), 151–177.

[Soe] Wolfgang Soergel, *Charakterformeln für Kipp-Moduln über Kac-Moody-Algebren*, Representation Theory **1**, An Electronic Journal of the American Mathematical Society, (1997), 37–68.